



一类新冠病毒传播的线性时滞 动力学模型与数据分析

程晋

复旦大学数学科学学院

上海现代应用数学重点实验室

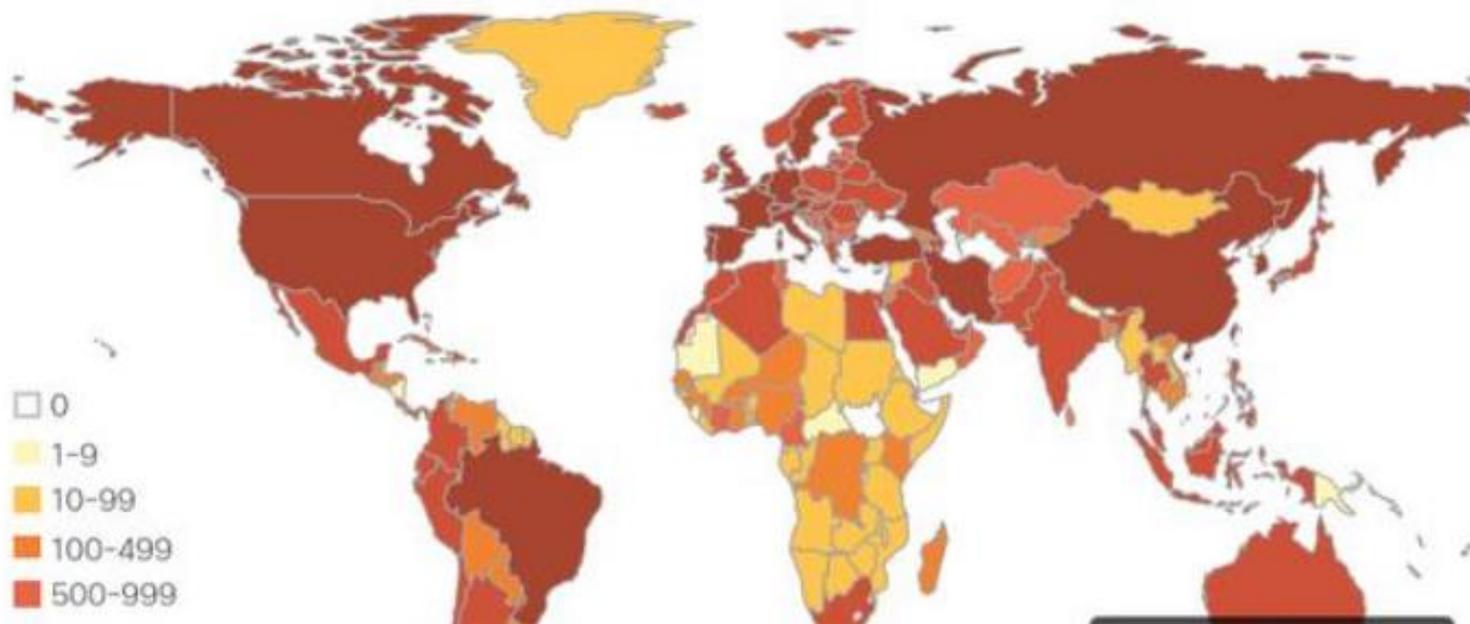
内 容

- 新冠病毒在中国和世界各地的传播
- 线性动力学模型
- 若干关于模型的理论分析
- 基于公开数据的系数反演与趋势判断
- 近期的研究

新冠疫情 COVID-19

- 世界的重大事件

1694578	1255978	105344	333256
累计确诊	现有确诊 [?]	死亡人数	治愈人数
昨日+87965	昨日+53142	昨日+6839	昨日+27984



新闻媒体



01月23日
疫情日报

疫情形势 [查看疫情实时地图 >](#)



今日：确诊830例，死亡25例，治愈34例

昨日：确诊571例，死亡17例

截至2020.01.23 24:00

描述疫情的发展的数学模型

- 不是从医学的角度分析疫情的传播，而是从一般的传输机理分析
-

- 是否可以？已有的模型？
- 什么样的模型“可行”？新冠肺炎（COVID-19）的特点是什么？

研究问题的思路和方法

- 反问题的思考方式和方法
- 基于模型
 - 从可观测的数据，反演无法直接观测到的参数或者系数
 - 利用反演得到的参数，进行系统演化，得到系统的预测结果

已有的疫情传播模型

- SI、Logistic模型（非线性二次模型）

- 主要在流行病学中应用较多，比较常用的情形是探索某疾病的危险因素，根据危险因素预测某疾病发生的概率。

$$\frac{dI}{dt} = rI \left(1 - \frac{I}{K}\right), \quad r = \beta K.$$

- SIR、SIRS、SEIR 模型

- 常微分方程系统

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta IS, & \frac{dE}{dt} = \beta IS - (\alpha + \gamma_1)E, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - \gamma_2 I, & \frac{dR}{dt} = \gamma_1 E + \gamma_2 I. \end{cases}$$

SARS的复盘分析

- 李大潜院士、丁光宏教授复旦大学团队复盘了2002年末—2003年初的SARS疫情传播规律：
 - 运用 SEIJR 模型简化后的SIJR 模型

SARS 爆发预测和预警的数学模型研究

刘畅 丁光宏* 龚剑秋 王凌 程珂 张迪

(复旦大学力学与工程科学系生物力学研究所, 上海 200433. * 联系人, E-mail: ghding@fudan.edu.cn)

COVID-19的特点

- 潜伏期

- 此次新型冠状病毒可在潜伏期传播的特性

- 数据的滞后性

- 公布数据会因为确诊需要时间所带来的数据滞后性

一些记号

- 记号如下

公开数据

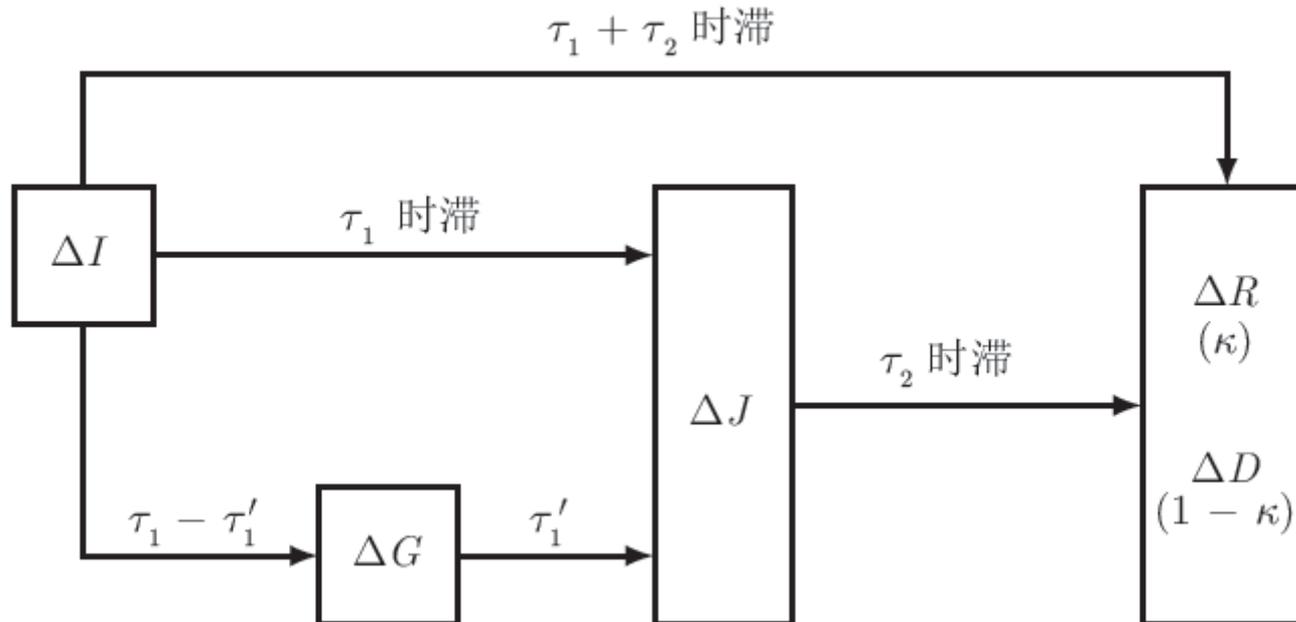


- $I(t)$: t 时刻感染者的累计总数;
- $J(t)$: t 时刻确诊者的累计总数;
- $G(t)$: t 时刻已感染, 仍处于潜伏期, 但已隔离的人群的实时总数;
- $R(t)$: t 时刻康复者的累计总数;
- $D(t)$: t 时刻因病死亡者的累计总数.

考虑到潜伏期的影响, 我们假设:

具有时滞的动力系统

- 我们基于



感染源

- 在建模过程中，最重要的是考虑感染源

$$I_0(t) = I(t) - J(t) - G(t)$$

- 因此，建模围绕着“感染源”展开

感染人数 $I(t)$

- 感染人数的变化与感染源的人数成正比

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \beta I_0(t) \Delta t$$

- 连续化

$$\frac{dI}{dt} = \beta I_0(t)$$

- β 被定义为传染率

— 它代表每个感染者在单位时间内的平均传染人数. 在就医和隔离期间, 我们认为确诊者和隔离者均无传染性. 因此, 在时刻 t 能引起进一步传染的人数是 $I(t) - G(t) - J(t)$.

确诊人数 $J(t)$

- 确诊的人数与之前“潜伏期”中感染源成正比

$$J(t + \Delta t) - J(t) = \left\{ \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt' \right\} \Delta t$$

- 连续化

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt'$$

- 系数 γ 是致病率参数

— 累计确诊人数 $J(t)$ 均来自于潜伏期 τ_1 天内的感染人数.

隔离人数 $G(t)$

- 隔离者人数 $G(t)$ 的变化由以下两个因素决定：
 - 具有传染性的人群因政府防控措施而被隔离, 其中隔离率为 l ;
 - 感染者在前面一段时间已被隔离, 无法传染。时滞项代表这个效应

$$-l \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t')(I(t') - J(t') - G(t'))dt'$$

$$G(t+\Delta t) - G(t) = \left\{ l(I(t) - J(t) - G(t)) - l \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t')(I(t') - J(t') - G(t'))dt' \right\} \Delta t$$

- 连续化

$$\frac{dG}{dt} = l(I(t) - J(t) - G(t)) - l \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t')(I(t') - J(t') - G(t'))dt',$$

治愈人数 $R(t)$

- 一旦被感染, 需经历 τ_1 天的潜伏期和 τ_2 天的治疗期才能结束治疗

$$R(t + \Delta t) - R(t) = \left\{ \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt' \right\} \Delta t$$

- 连续化

$$\frac{dR}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt'.$$

核函数 $h_i(\hat{t}, t')$ ($i = 1, 2, 3$),

- 核函数是延迟天数的概率分布
— 满足归一化条件:

$$\int_{t-2\tau_i}^t h_i(t - \tau_i, t') dt' = 1, \quad i = 1, 3$$

可选项: δ 函数 or 类似高斯函数

$$h_i(t, t') = c_i \exp^{-d_i(t-t')^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

TDD-NCP模型

- Time Delay Dynamic System

- $I(t)$: t 时刻感染者的累计总数;
- $J(t)$: t 时刻确诊者的累计总数;
- $G(t)$: t 时刻已感染,仍处于潜伏期,但已隔离的人群的实时总数;
- $R(t)$: t 时刻康复者的累计总数;
- $D(t)$: t 时刻因病死亡者的累计总数.

考虑到潜伏期的影响,我们假设:

$$\frac{dI}{dt} = \beta(I(t) - J(t) - G(t)),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt',$$

$$\frac{dG}{dt} = l(I(t) - J(t) - G(t)) - l \int_0^t h_2(t - \tau_1', t') (I(t') - J(t') - G(t')) dt',$$

$$\frac{dR}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt'.$$

TDD-NCP模型 (version 1)

- 第一版

$$\frac{dI}{dt} = \beta(I(t) - J(t) - G(t)),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt',$$

$$\frac{dG}{dt} = \ell(I(t) - J(t) - G(t)) - \int_0^t h_2(t - \tau_1', t') G(t') dt',$$

$$\frac{dR}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt'.$$

时滞模型的特点

- 线性方程

- 含有积分项（非局部）

- 参数意义清楚

- 由于公开数据提供的信息有限，我们假设：

- 参数为常数，或者分段常数

关于数据的注释

- 这里需要指出的是：
 - 在政府每日发布的疫情数据中,可以获得累计确诊人数 $J(t)$ 和累计治愈人数 $R(t)$ 的信息。
 - $I(t)$ 和 $G(t)$ 通常无法获得。

正问题

- 给定 $\{\beta, l, \gamma, \kappa, \tau_1, \tau_1', \tau_2\}$
- 求解

$$\frac{dI}{dt} = \beta(I(t) - J(t) - G(t)) + I_s(t),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt' + J_s(t),$$

$$\frac{dG}{dt} = l(I(t) - J(t) - G(t)) - \int_0^t h_2(t - \tau_1', t') G(t') dt' + G_s(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt' + R_s(t)$$

$$I(t) = I_0(t), \quad t \leq 0$$

$$J(t) = J_0(t), \quad t \leq 0$$

$$G(t) = G_0(t), \quad t \leq 0$$

$$R(t) = R_0(t), \quad t \leq 0.$$

理论分析

- 关于传染源 $I_0(t)$ 的方程

$$\frac{dI_0}{dt} = (\beta - l)I_0 + lh_2 * I_0 - \gamma\beta h_1 * I_0$$

$$I_0(t) = g(t), \quad t \in (-\tau_1 - \tau_2, 0]$$

传染源方程的动力学分析

- 线性时滞系统

$$\frac{dI_0}{dt} = (\beta - l)I_0 + H * I_0$$

where

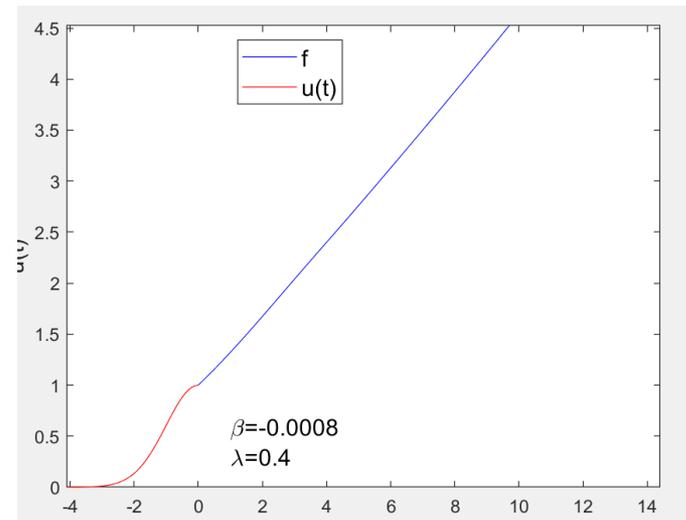
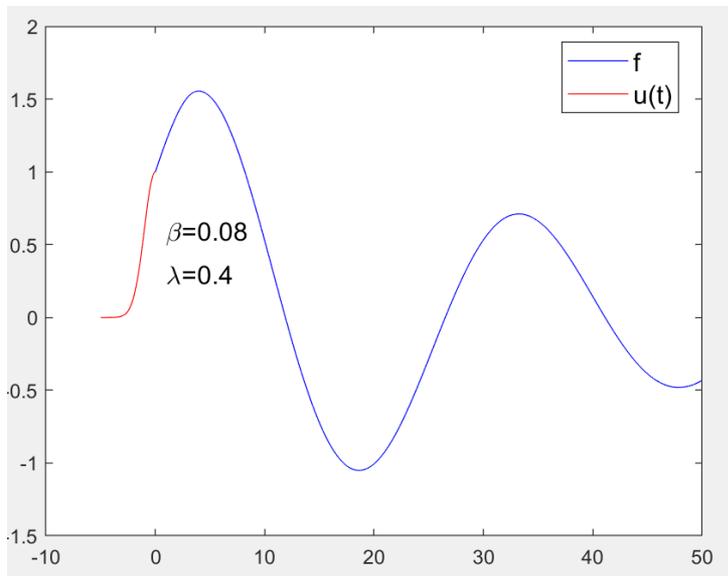
$$H = lh_2 - \gamma\beta h_1$$

$$H(t, t') = lh_2(t - \tau', t') - \gamma\beta h_1(t - \tau_1', t')$$

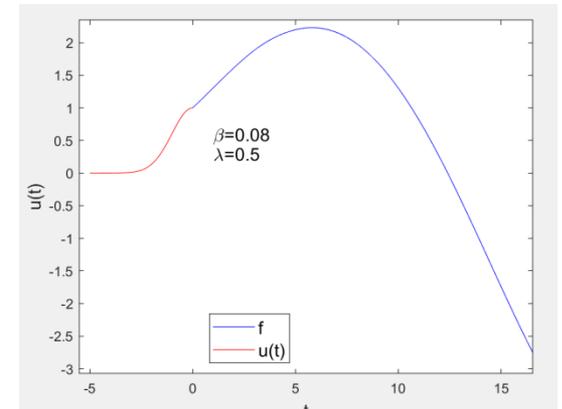
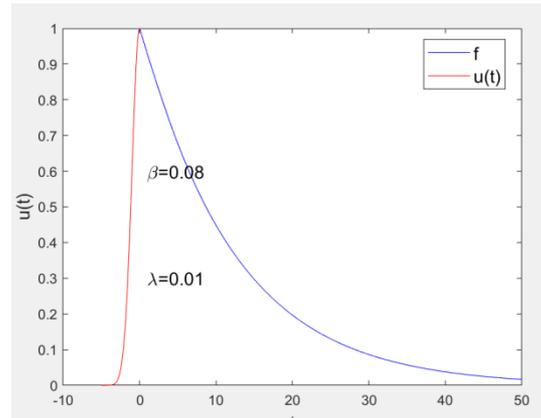
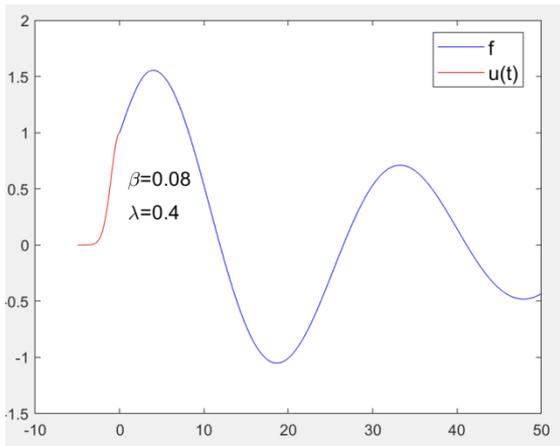
简化系统

- 简化系统

$$\frac{du}{dt} = -\beta u + \lambda \frac{1}{T} \int_{t-T}^t (u(t) - u(t')) dt'$$
$$u(s) = f(s), \quad x \in (-T, 0)$$



关于 λ 的变化



模型有效性条件

- 模型有意义，必须

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &\geq 0, \\ \frac{dJ}{dt} &\geq 0, \\ \frac{dR}{dt} &\geq 0. \end{aligned}$$

模型有效的条件



方程停止求解
的条件

- 方程有效性条件：T为“疫情”结束的时间

$$I_0(t) > 0, \quad t \in (0, T)$$

$$I_0(T) = 0$$

反问题与预测

- 从公开数据反演模型中需要确定的参数
 - 反演传染率 β ， 隔离率 1
- 在模型中，用反演得到的参数，进一步系统演化（数值模拟），预测疫情的走势
 - 特别是疫情“拉平”的时间 T

反演方案

- 根据每日的累计病例数 $J_{\text{数据}}$ 和累计治愈人数 $R_{\text{数据}}$
反演 β, l :

$$\min_{\beta, l} \|J(\beta, l) - J_{\text{数据}}\|_2.$$

理论上的问题

- 数学模型是否可以比较好的刻画新冠疫情的传播？
- 数学模型的适定性？
- 反演参数的唯一性？
- 预测结果的可信性？

线性微分积分方程

- 存在唯一性（Volterra型）

$$\frac{dI}{dt} = \beta(I(t) - J(t) - G(t)),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt',$$

$$\frac{dG}{dt} = l(I(t) - J(t) - G(t)) - \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t') G(t') dt',$$

$$\frac{dR}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt'.$$

$$I(t) = I_0(t), \quad J(t) = J_0(t), \quad G(t) = G_0(t), \quad R(t) = R_0(t), \quad t \leq 0.$$

反演系数问题的提法

- 对于TDD-NCP模型

$$\frac{dI}{dt} = \beta(I(t) - J(t) - G(t)),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt',$$

$$\frac{dG}{dt} = l(I(t) - J(t) - G(t)) - \int_0^t h_2(t - \tau_1', t') G(t') dt'$$

$$I(t) = I_0(t), \quad J(t) = J_0(t), \quad G(t) = G_0(t), \quad t \leq 0.$$

- 给定其他条件，从J(t)的观测值重构 β, l

时滞动力系统的反问题

- 反系数问题（主要系数 $\beta, 1$ ）
 - 唯一性
 - 稳定性（含有误差）
 - 算法

基于重构得到 β, l ，预测后期发展

- 求解方程

$$\frac{dI_0}{dt} = (\beta - l)I_0 + lh_2 * I_0 - \gamma\beta h_1 * I_0$$

$$I_0(t) = g(t), \quad t \in (-\tau_1 - \tau_2, 0]$$

- 得到第一个 T ，满足： $I_0(T) = 0$

如果 T 不存在，则说明“疫情”不会结束

时滞动力系统的反问题

- 反源问题（从数据中发现超级传播者）
 - 唯一性
 - 算法

实证数据分析

- 用1月23日—2月1日的公开数据反演传染率和隔离率

中国科学：数学 2020年 第50卷 第3期：1~8

SCIENTIA SINICA Mathematica

论文



《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS



基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测

严阅¹, 陈瑜¹, 刘可伋^{1,2}, 罗心悦¹, 许伯熹¹, 江渝¹, 程晋^{3*}

减少参数（稀疏性假设）

- 根据公开的统计数据

表 1 参数值

γ	κ	τ_1	τ'_1	τ_2
0.99	0.97	7	4	12

传染率与隔离率

- 各个地区的比较

表 2 参数的估计值

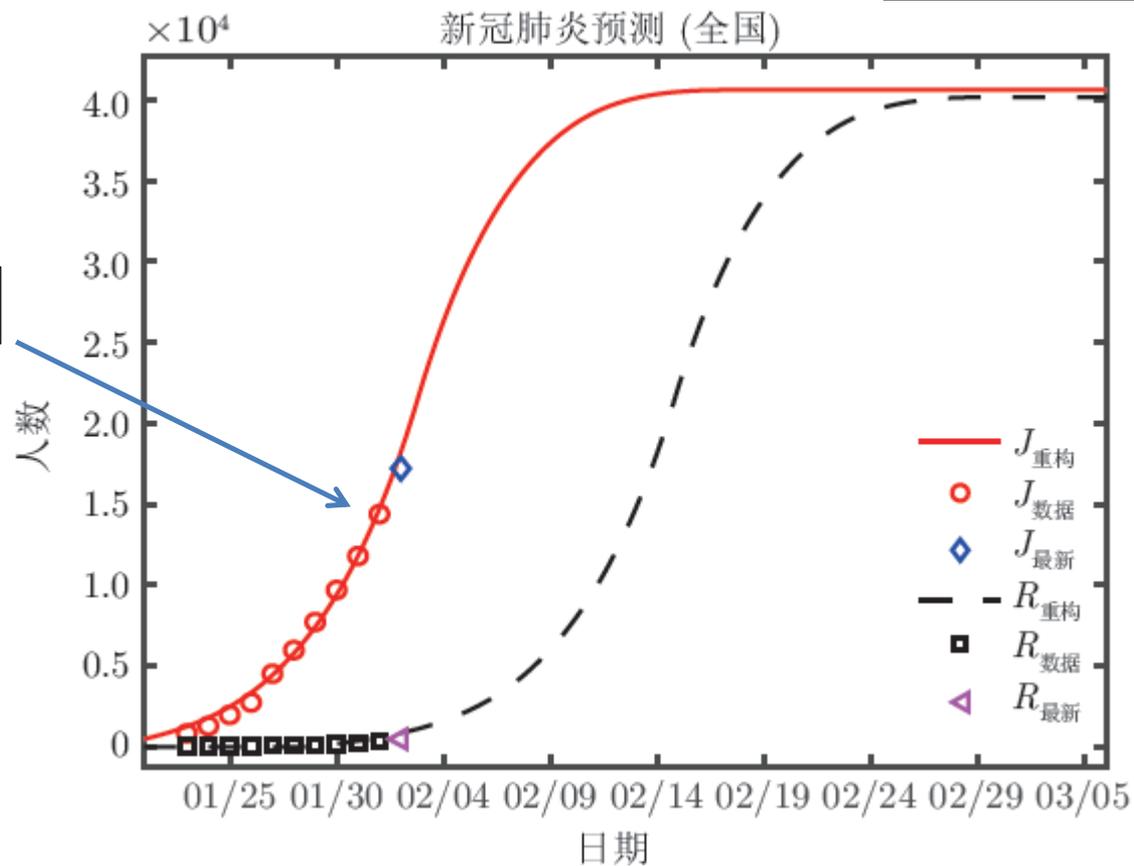
地区	传染率 β	隔离率 ℓ
全国 (除港澳台)	0.2320	0.4202
武汉市	0.1957	0.5500
上海市	0.2113	0.5500
江苏省	0.2581	0.5500

预测结果 (全国)

- 全国

3月13日 **81004**

2月1日 **14380**

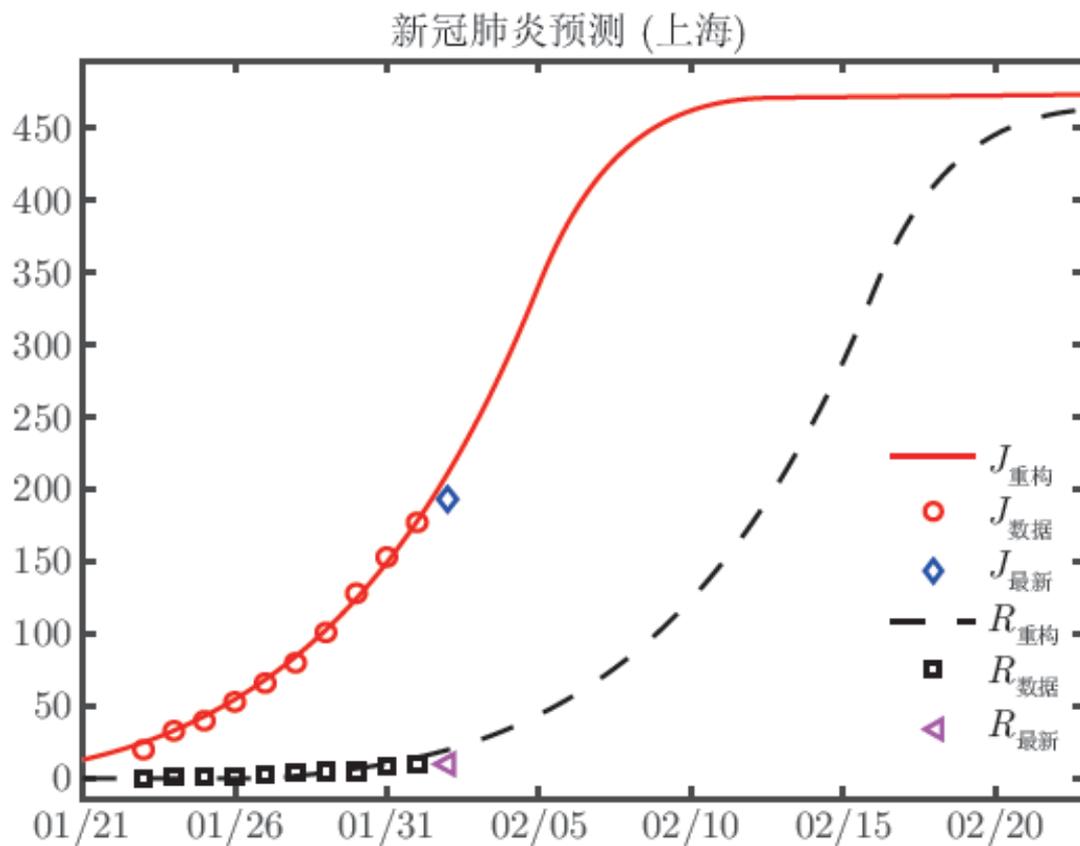


预测结果（上海）

- 上海

管控措施加强!

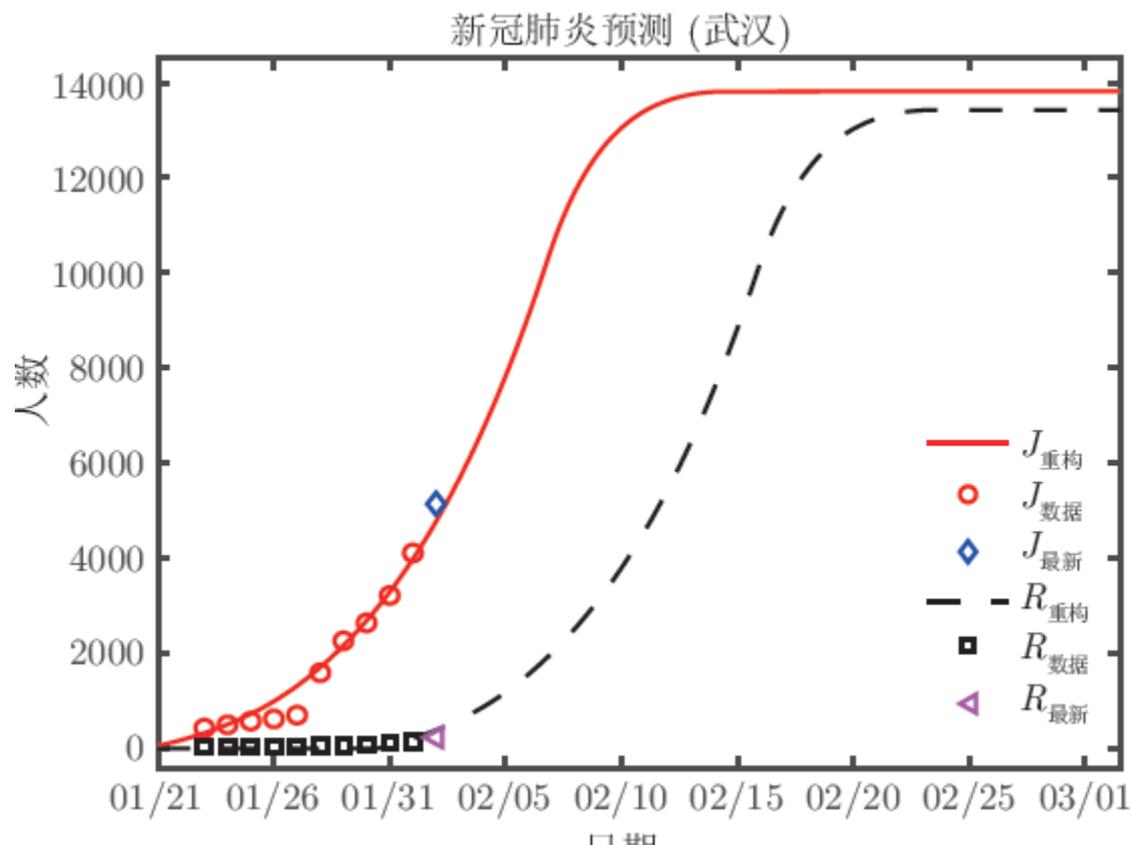
3月13日 346



预测结果 (武汉)

- 武汉

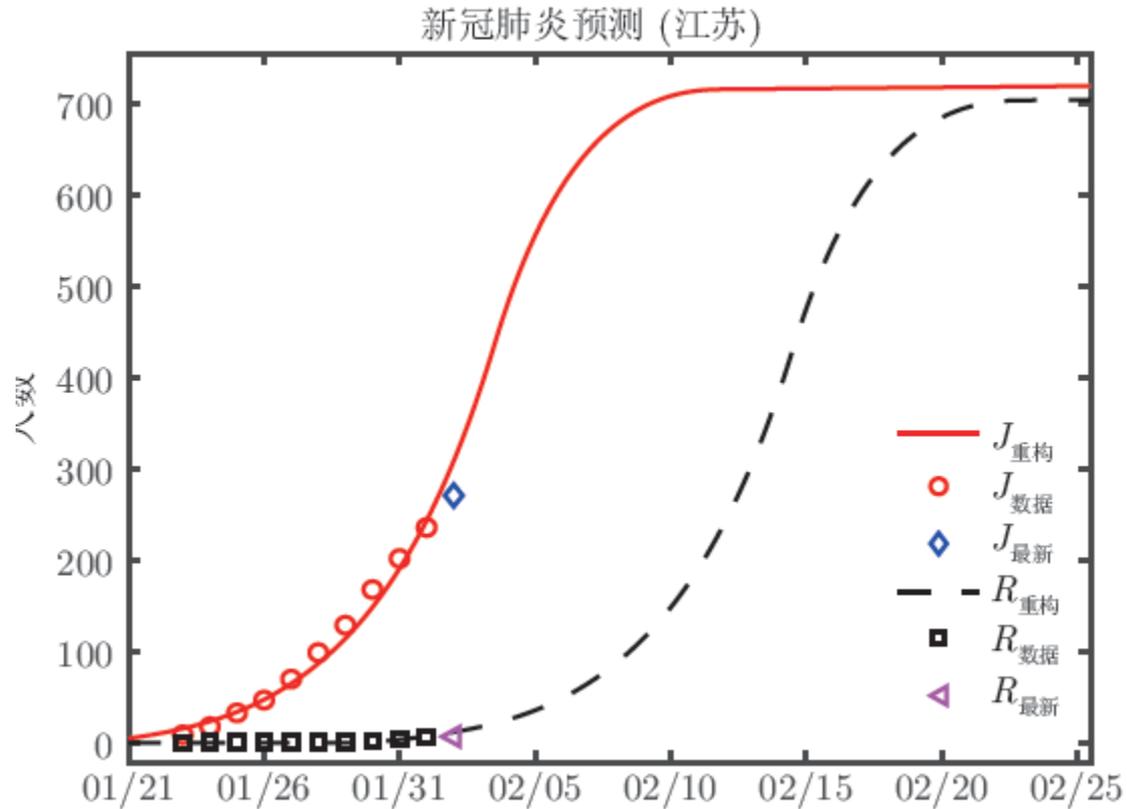
3月13日 **49991**



预测结果 (江苏)

- 江苏

3月13日 631



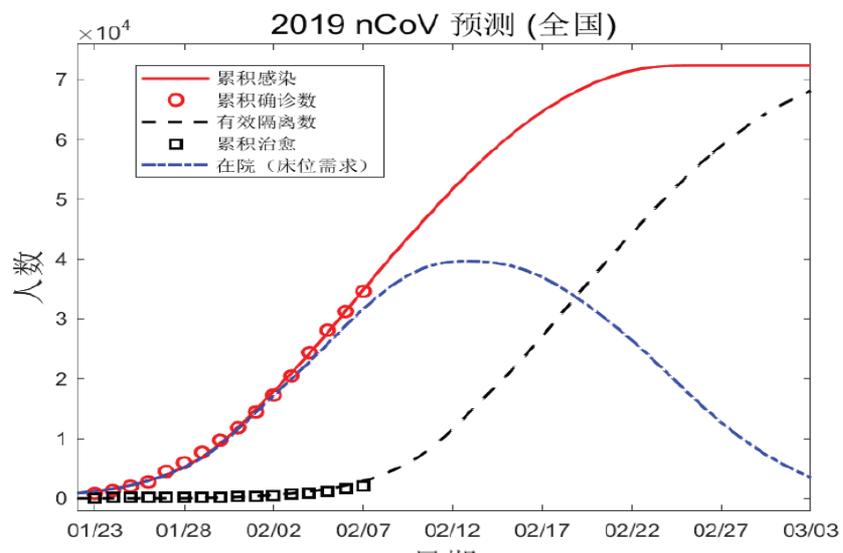
最后的结果与实际有一定差距

- 模型不对?
- 方法不对?
- 数据不对?

实验室研究报告

- 全国的预测

基于时滞动力学系统新冠肺炎传播模型的若干预测分析



实验室报告

- 时间

上海市现代应用数学重点实验室研究报告 Research Report Series of SKLCAM (2020 年第一期)

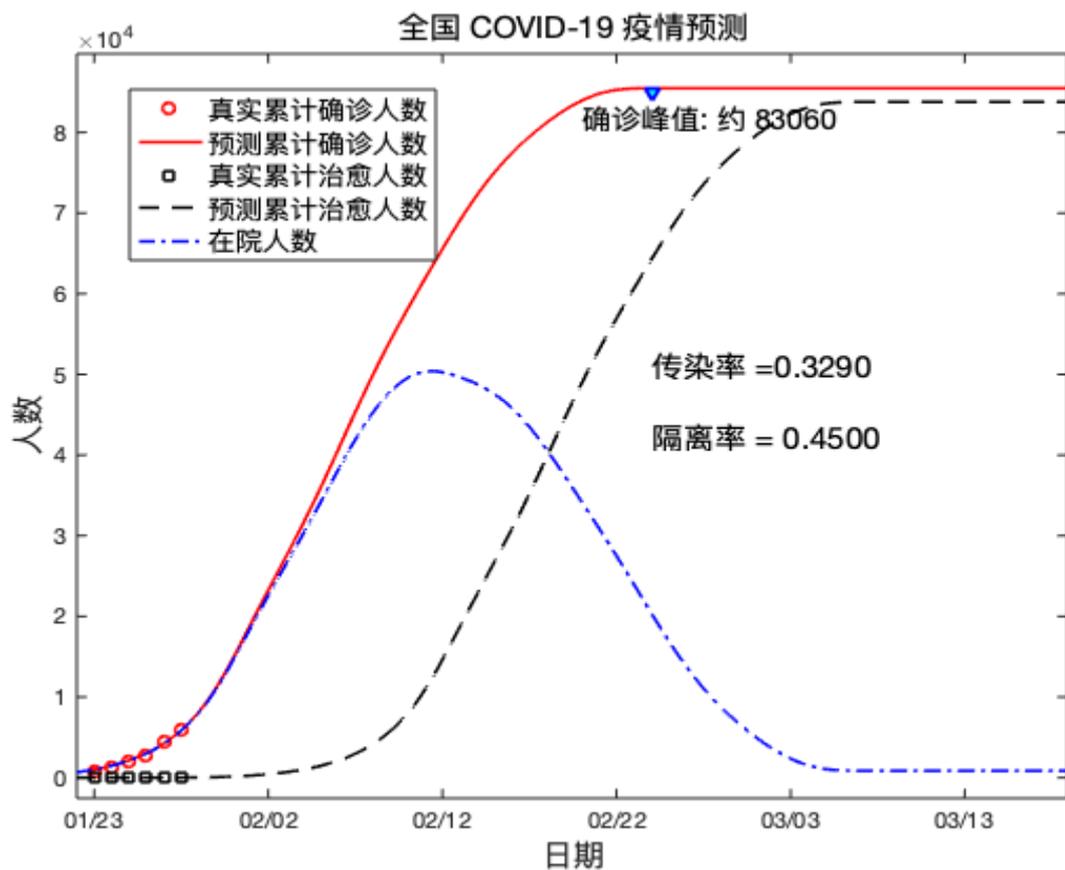
发布时间：2020-02-09 阅读次数：421



上海市现代应用数学重点实验室研究报告
Research Report Series of SKLCAM

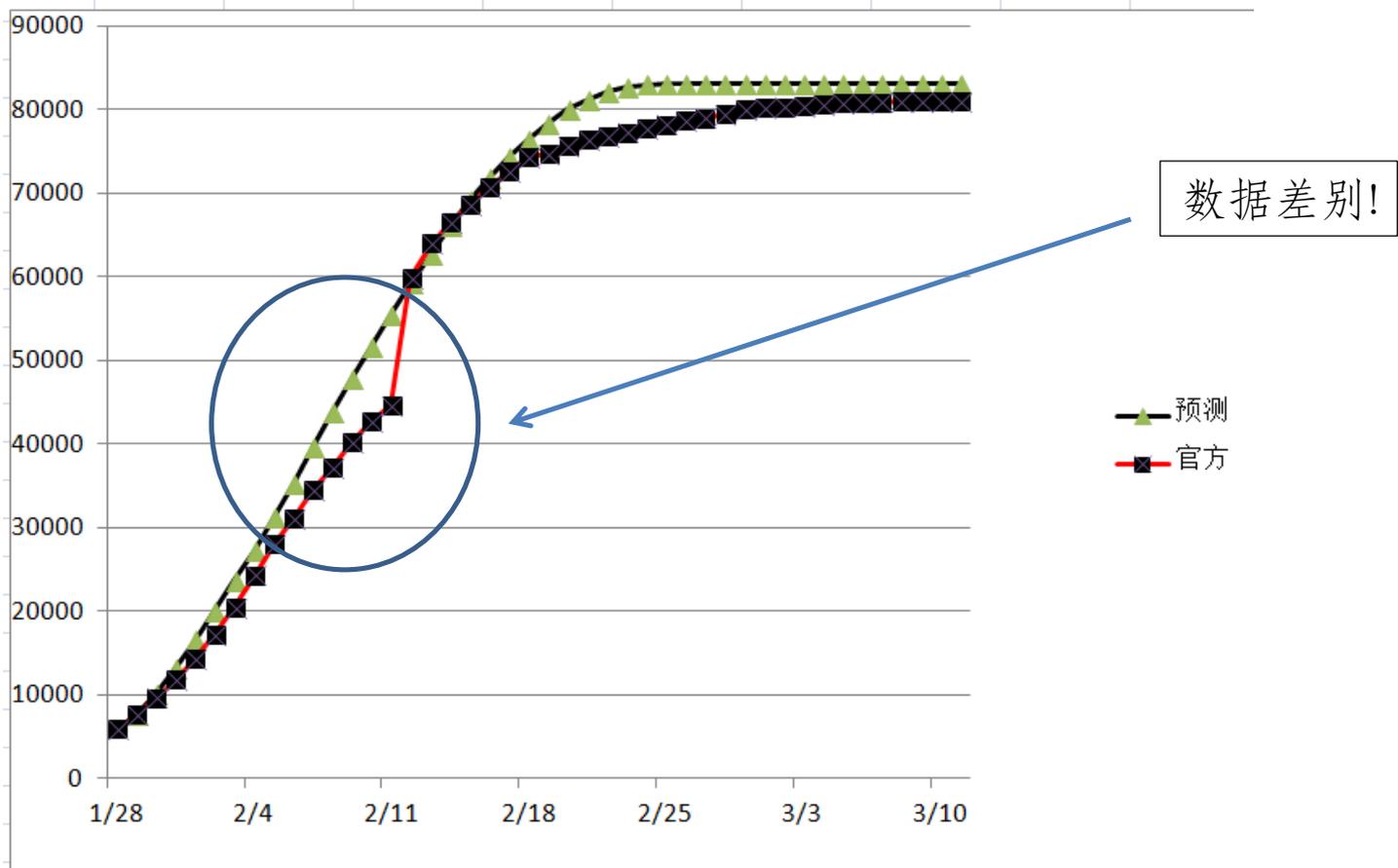
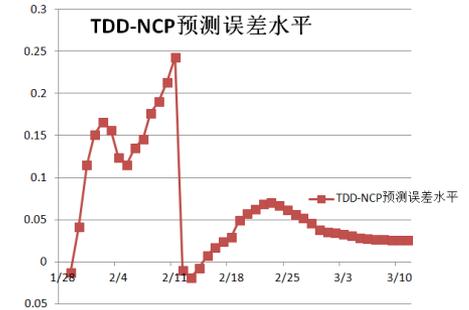
选择性使用数据

- 1月23日—1月28日的的数据



实际结果

- 实际发布的数据与预测结果



数值模拟中出现的问题

- 数据的可信性？
 - 国内初期数据，日本，美国。。。。
- 反演的结果严重依赖选取的数据！
 - 中间一段数据“失真”
- 预测结果：全国 > 湖北 > 其他城市
 - 统计平均意义下的模型

Fudan-CCDC模型 (陈文斌等)

- 简化TDD-NCP 模型

- 设 $I_0(t) = I(t) - J(t) - G(t)$

- 则有

$$\frac{dI_0(t)}{dt} = \beta I_0(t) - \gamma_\beta \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') I_0(t') dt' - \ell \left(I_0(t) - \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t') I_0(t') dt' \right).$$

离散情形

- 如果延迟函数取成 δ 函数

$$I_0(t+1) = (1 + \beta - \ell)I_0(t) - \gamma_\beta I_0(t - \tau_1) + \ell I_0(t - \tau'_1),$$

$$J(t+1) = J(t) + \gamma I_0(t - \tau_1),$$

$$G(t+1) = G(t) + \ell(I_0(t) - I_0(t - \tau'_1)).$$

这里的 τ_1 和 τ'_1 可以与TDD-NCP-r模型不同,通常可考虑传染病随机模型的最大似然估计得到的时刻.

Fudan-CCDC-1 (隔离发生在感染时刻)

- 连续情形

$$\frac{dI}{dt} = \beta I_0(t),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \beta \int_{-\infty}^t f_4(t-s) I_0(s) ds,$$

$$\frac{dG}{dt} = \ell I_0(t) - \ell \int_{-\infty}^t f_4(t-s) I_0(s) ds.$$

- 离散情形

$$I(t+1) = I(t) + \beta I_0(t),$$

$$J(t+1) = J(t) + \beta \sum_{s \leq t} f_4(t-s) I_0(s),$$

$$G(t+1) = G(t) + \ell I_0(t) - \ell \sum_{s < t} f_4(t-s) I_0(s).$$

Fudan-CCDC-2 (隔离发生在发病时刻)

- 连续情形
$$\frac{dI}{dt} = \beta I_0(t),$$
$$\frac{dJ}{dt} = \beta \int_{-\infty}^t f_4(t-s)I_0(s)ds,$$
$$\frac{dG}{dt} = \ell \int_{-\infty}^t f_2(t-s)I_0(s)ds - \ell \int_{-\infty}^t f_4(t-s)I_0(s)ds.$$

- 离散情形

$$I(t+1) = I(t) + \beta I_0(t),$$

$$J(t+1) = J(t) + \beta \sum_{s \leq t} f_4(t-s)I_0(s),$$

$$G(t+1) = G(t) + \ell \sum_{s \leq t} f_2(t-s)I_0(s) - \ell \sum_{s \leq t} f_4(t-s)I_0(s).$$

重要贡献

- 核函数的选择（基于CCDC的公开数据）

$$f_2(t) = \frac{0.5977}{t} e^{-1.105(\ln(t)-1.417)^2}$$

$$f_3(t) = 0.005559t^{1.641} e^{-0.002105t^{2.641}}$$

$$f_4(t) = f_2 * f_3(t) = 0.06244e^{-\left(\frac{t-10.87}{5.378}\right)^2} + 0.03322e^{-\left(\frac{t-15.97}{23.8}\right)^2}.$$

框架图

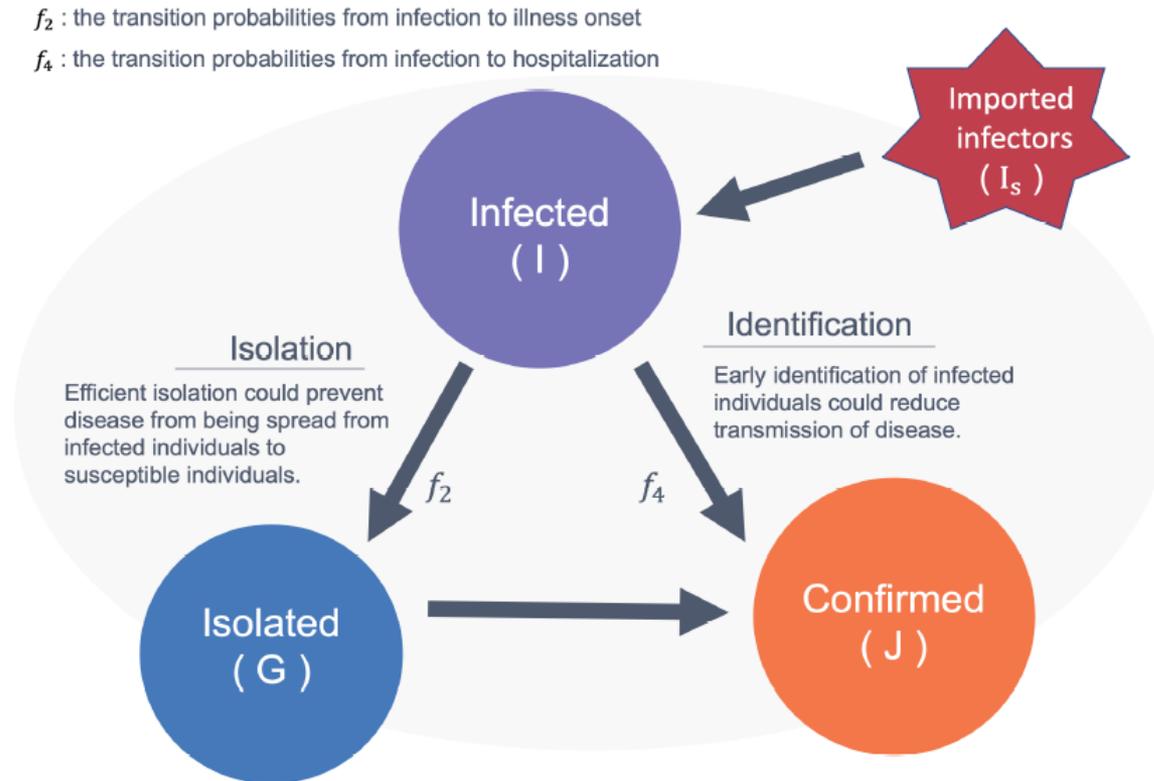
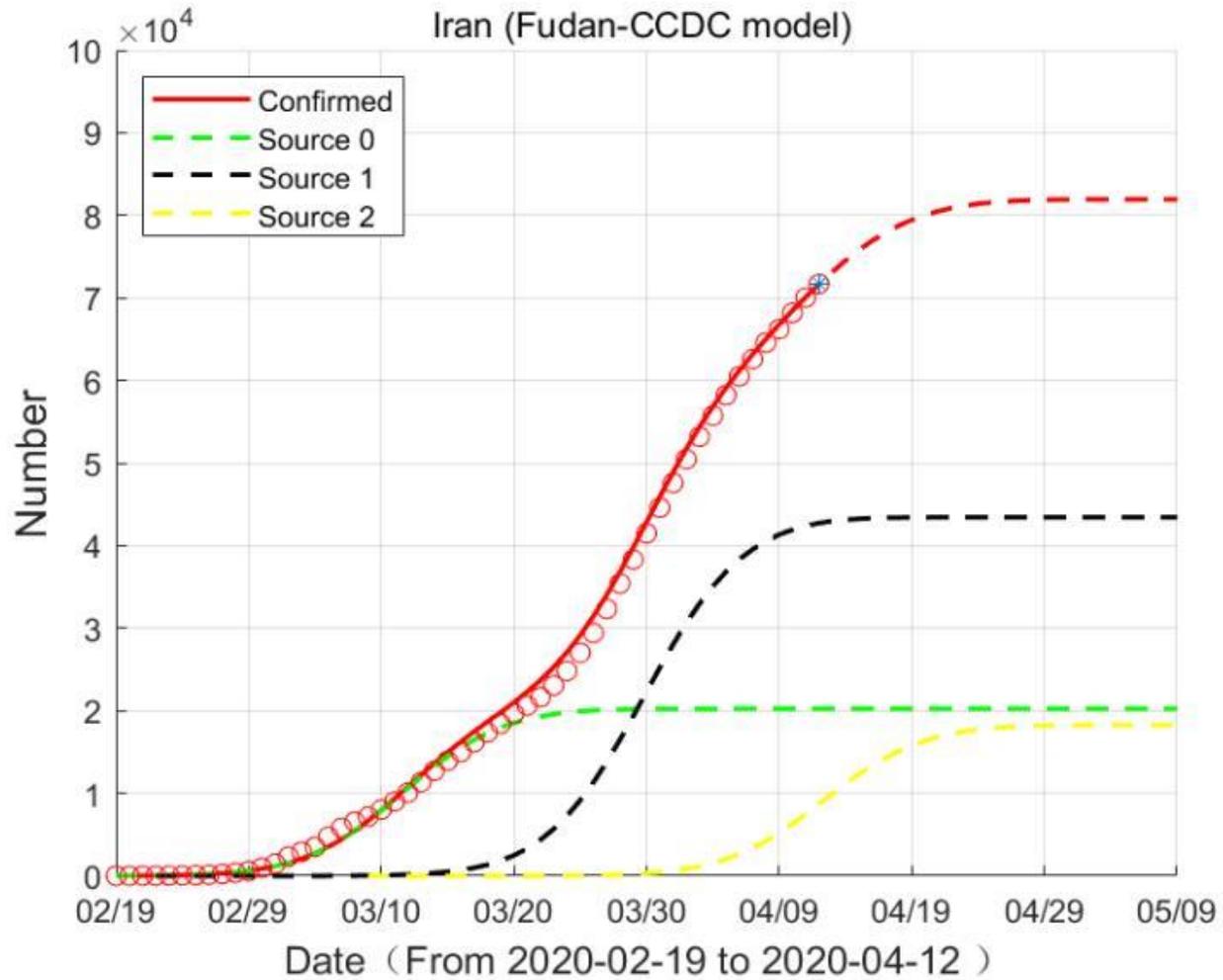


Figure 1: Sketch map of the model.

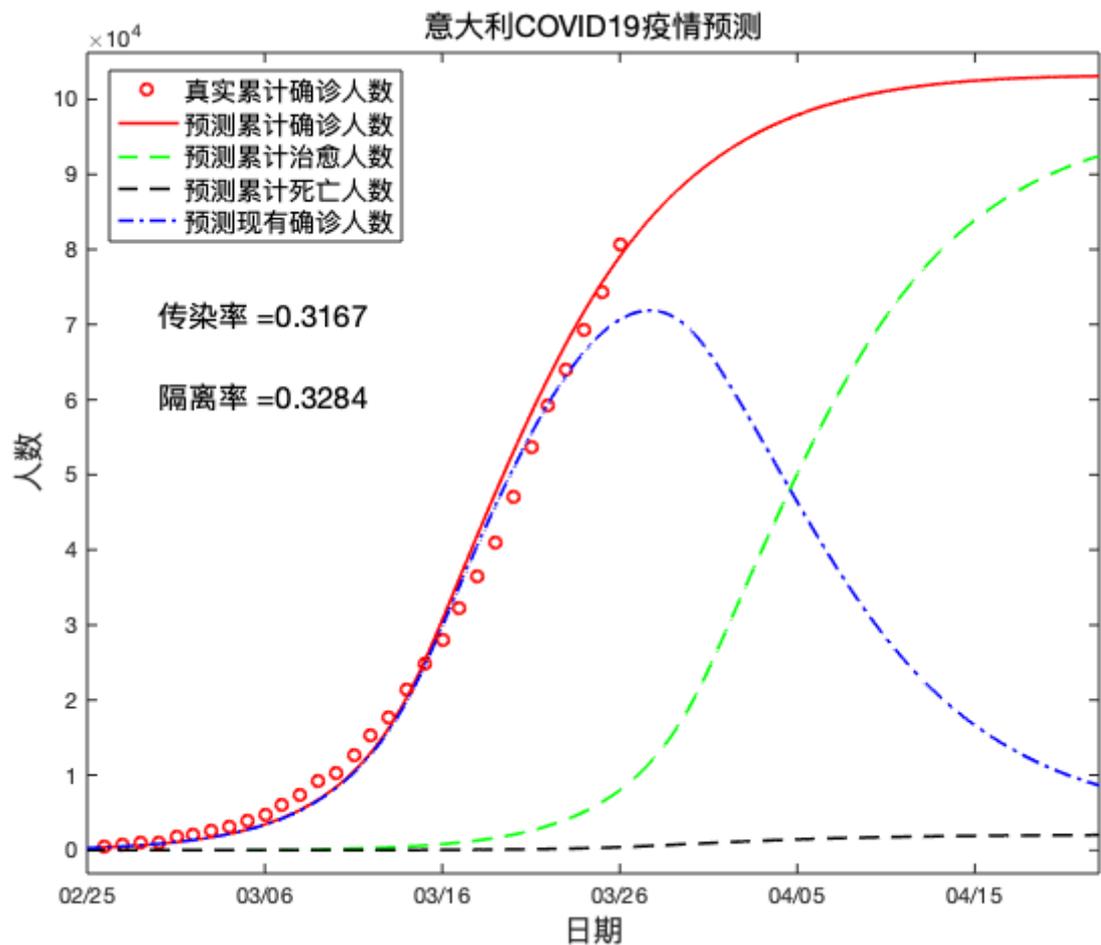
模型解决问题的例子

- 各个国家目前情况的分析与预测
 - 伊朗
 - 意大利
 - 美国
- 超级传播者的发现（回溯）

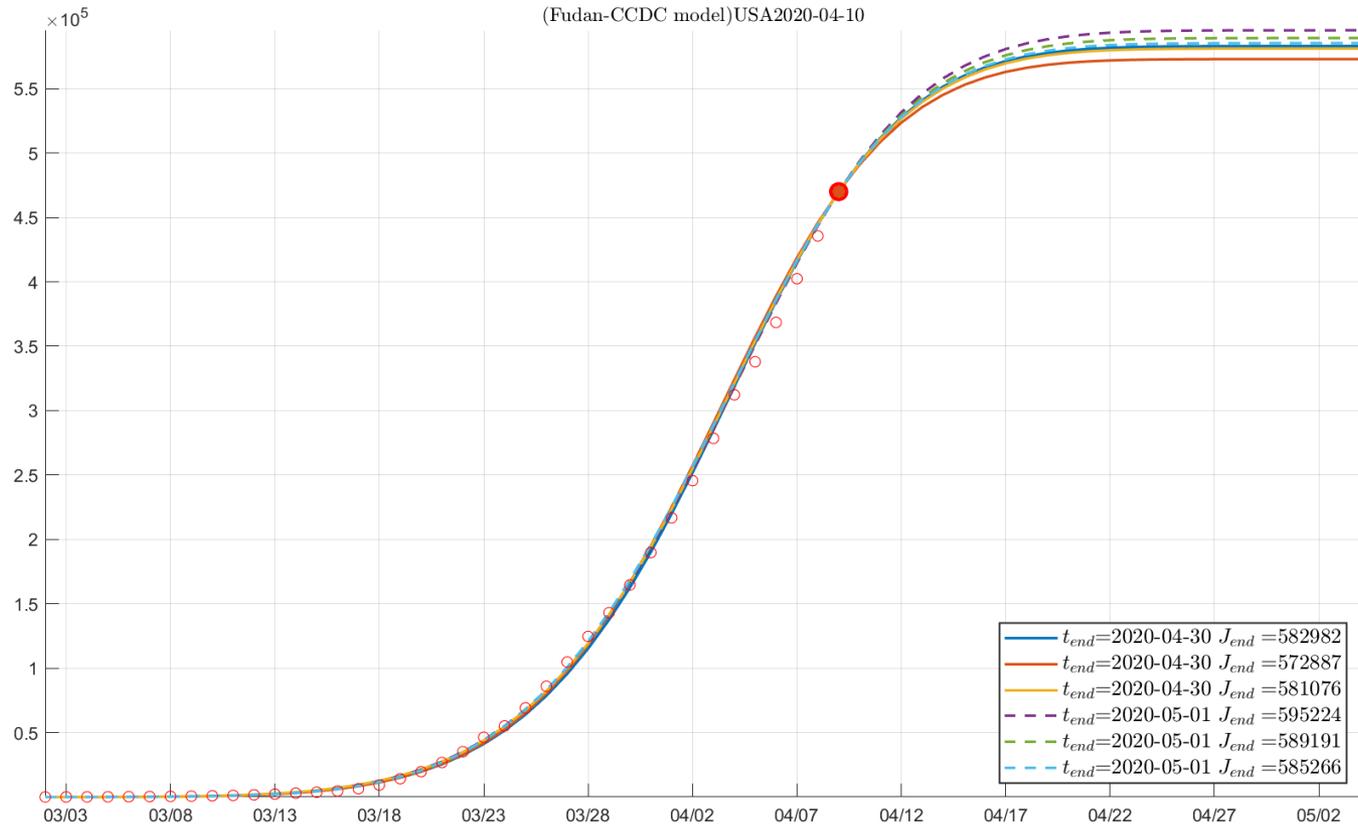
伊朗



意大利

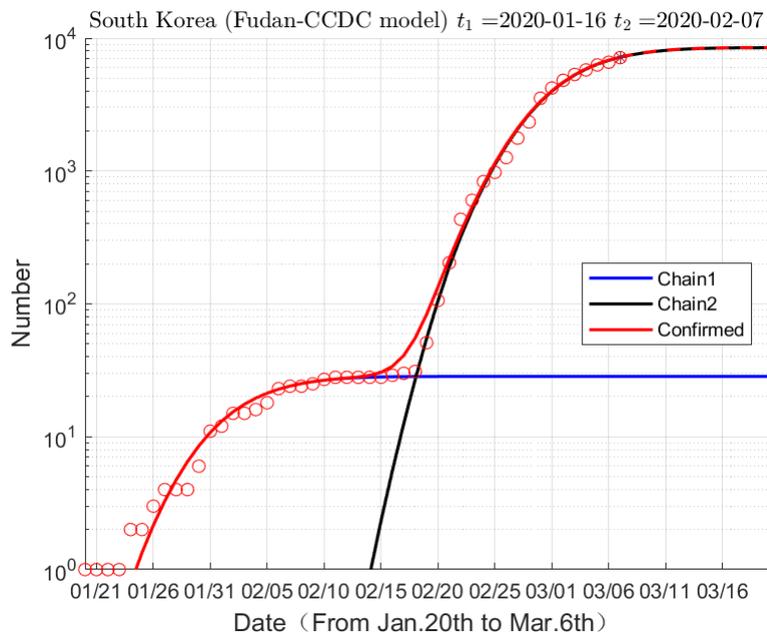


美国



韩国超级传播者

卫宁健康的App网站



08:36

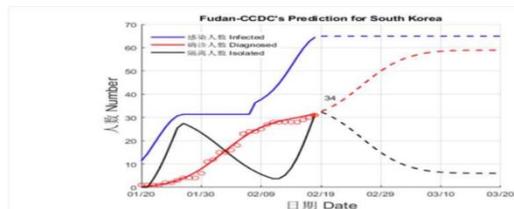
新型冠状病毒肺炎-疫情动态

本地疫情 疫情观点 防护手册 实时播报

疫情观点

数据说明

利用数学模型推测输入型传染源



复旦大学数学家发现在2月7日左右可能有感染病人输入韩国。韩国疾病管理本部中央防疫对策本部长郑银敬在2月18日例行记者会上表示，从国内外疫情来看，新冠病毒疫情进入新局面。上海市现代应用数学重点实验室的研究团队联合卫宁健康人工智能实验室，将Fudan-CDCC模型进一步用于国内外新冠感染病人的预测，通过韩国感染人数的分析，模型显示在2月7号左右有感染人数的突然上升，疑为输入型病例。

Fudan-CCDC模型—基本再生数

- Nian Shao, Jin Cheng, Wenbin Chen. The reproductive number R_0 of COVID-19 based on estimate of a statistical time delay dynamical system, medRxiv 2020.02.17.20023747; doi: <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.02.17.20023747v2>.

Article usage: February 2020 to March 2020

	Abstract	Pdf
Feb 2020	4574	770
Mar 2020	941	326

Tweets referencing this article:

aula
@aula531

RT @hayashiyus: このモデルは、武漢、北京、上海等における #COVID19 の流行をよく説明する「時間遅れ力学系を使った統計モデル」として論文[1]で提案され、論文[2]において日本における流行予測モデルとして検討されました。1. <https://t.co/...>

06:09PM

Fudan-CCDC模型——日本预测

- Nian Shao, et al. CoVID-19 in Japan: What could happen in the future?,
<https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.02.21.20026070v2>

CoVID-19 in Japan: What could happen in the future?

Nian Shao, Hanshuang Pan, Xingjie Li, Weijia Li, Shufen Wang, Yan Xuan, Yue Yan, Yu Jiang, Keji Liu, Yu Chen, Boxi Xu, Xinyue Luo, Christopher Y. Shen, Min Zhong, Xiang Xu, Xu Chen, Shuai Lu, Guanghong Ding, Jin Cheng, Wenbin Chen

doi: <https://doi.org/10.1101/2020.02.21.20026070>

Article usage: February 2020 to March 2020

	Abstract	Pdf
Feb 2020	27611	23704
Mar 2020	10694	14589

目前正在进行的研究

- 跟踪各国的疫情数据
- 研究模型的系数反问题的唯一性、稳定性

论文

- **TDD-NCP模型：**

- Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang and K. Liu, A Time Delay Dynamical Model for Outbreak of 2019-nCoV and the Parameter Identification, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 已接收, arXiv: 2002.00418, 2020.
- 严阅, 陈瑜, 刘可伋等, 基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测[J/OL], 中国科学: 数学, 50 (3), 1-8, 2020.
<https://doi.org/10.1360/SSM-2020-0026>.
- Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang and K. Liu, A Time Delay Dynamic System with External Source for the Local Outbreak of 2019-nCoV, Applicable Analysis, 2020.
DOI: 10.1080/00036811.2020.1732357.

论文

- Fudan-CCDC模型
 - YuYan, et al. COVID-19 in Singapore: another story of success, International Journal of Mathematics for Industry, 已接收, 2020.
 - Nian Shao, Jin Cheng, Wenbin Chen. The reproductive number R_0 of COVID-19 based on estimate of a statistical time delay dynamical system, medRxiv 2020.02.17.20023747; doi: <https://doi.org/10.1101/2020.02.17.20023747>.
 - Nian Shao, et al. CoVID-19 in Japan: What could happen in the future?, <https://doi.org/10.1101/2020.02.21.20026070>

论文

- 时滞模型
 - Nian Shao, Min Zhong, Yue Yan, HanShuang Pan, Jin Cheng, Wenbin Chen. Dynamic models for CoVID-19 and Data Analysis, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, Accepted.
 - 邵年, 钟敏, 程晋, 陈文斌. 基于Fudan-CCDC模型对新冠肺炎的建模和确诊人数的预测, *数学建模及其应用*, 2020, 接收。
 - 罗心悦, 邵年, 程晋, 陈文斌. 基于时滞动力学模型对钻石公主号邮轮疫情的分析, *数学建模及其应用*, 2020, 接收。
 - 刘可伋, 江渝, 严阅, 陈文斌. 局部新冠肺炎时滞模型及基本再生数的计算, *控制理论与应用*, 2020, minor reversion.
 - 邵年, 陈瑜, 程晋, 陈文斌. 关于新型冠状病毒肺炎一类基于CCDC统计数据的随机时滞动力学模型, *控制理论与应用*, 2020.

模型的意义

- 从严格意义上讲，所有的模型都是“错”的
- 模型是有意义
 - 给出一个粗略的估算和预期
 - 看到“**隧道尽头的曙光**”

谢谢！

欢迎大家一起讨论！

众志成城，抗击疫情！