复几何简介

郑方阳
重庆师范大学

国家天元数学东南中心
厦门大学
2023.04

目录 1/2

本次短课程的内容将大致分为以下五个部分：

（一）复流形：

- 定义和例子 • 近复流形 • 代数流形 • 复曲线与复曲面
- 李复流形：李群作为复流形 • 齐性复流形简介
- 彭罗斯的扭子空间

（二）凯勒流形：

- 度量、曲率、复空间形式 • 凯勒恒等式
- 霍奇分解与 Lefschetz 分解 • DGMS 定理
- 小平邦彦的消灭与嵌入定理 • Demailly-Paun 定理
- 形变、射影群与凯勒群

（三）厄米流形：

- 厄米度量与厄米联络 • 扰率、曲率、Bianchi 恒等式
- 三个经典的度量联络 • 幂零复流形、可解复流形
- Calabi-Eckmann 流形 • 局部共形凯勒流形、Vaisman 流形
- 紧齐性复流形

目录 2/2

（四）特殊的厄米流形类:

- 陈平坦流形 • Bismut 平坦流形 • 平衡流形
- 多重闭流形 • 非凯勒卡-丘流形 • 似凯勒流形
- 扰率平行流形

（五）厄米几何中的问题:

- 常全纯截曲率猜想 • 几类特殊的厄米结构
- Bismut 似凯勒流形的分类 • 厄米流形的变分问题
- Fino-Vezzoni 猜想 • Hull-Strominger 系统
- 广义 Hartshorne 猜想

参考书 1/1

以下是几本参考书，里面有关于复几何理论的较为详细的讨论：

1). S-S Chern: Complex manifolds without potential theory. Springer (1979)

2). R.O. Wells: Differential Analysis on Complex Manifolds. Springer (1980)

3). A. Moroianu: Lecture on Kahler Geometry. https://moroianu.perso.math.cnrs.fr/tex/kg.pdf

4). D. Huybrechts: Complex Geometry, an introduction.

5). F. Zheng: Complex Differential Geometry.

引言 1/7

复几何是一门研究复流形的几何、拓扑、与函数论性质的数学分支。其研究方法从大体上说可以粗略地分为**代数**方法与**分析**方法两大类，前者属于代数几何的范畴；而后者属于复微分几何，主要运用微积分与多复变函数论等手段进行研究，这也是本课程讨论的范围。

在任何复流形上总是存在厄米度量，即与近复结构相容的黎曼度量。设 M^n 为复流形，g 为其上的一个厄米度量。设 ω 为相应的凯勒形式：这是 M^n 上的一个处处正定的 $(1,1)$-形式。度量 g 被称为**凯勒**的，若 $d\omega = 0$。一个复流形被称为**凯勒型**的，若其上存在凯勒度量；否则就被称为**非凯勒型**的。

自 1950 年代以来，凯勒几何得到了长足的发展，人们对凯勒型的紧复流形有了较为深入的了解，许多数学家在此领域作出了贡献，其中的代表性人物有陈省身，Kodaira (小平邦彦)，Serre，Atiyah，Hirzebruch，Bott，Calabi，丘成桐等。

两个显然的因素促进了该领域的发展：一是凯勒型流形是一个足够大的研究对象类，它包含了所有的复射影流形(本文中我们将简称为**代数流形**)，即复射影空间中由一组齐次多项式的公共零点集所形成的紧复子流形，这是最简单、最自然的构成复流形的方式。另一个因素是凯勒几何的研究相对方便，因为厄米度量为凯勒当且仅当度量的黎曼联络(即 Levi-Civita 联络)与流形的近复结构也相容，此时黎曼几何与复结构完美匹配，几何学的结论往往可以直接演绎出流形的复解析性状。

引言 3/7

近十余年来，非凯勒几何学的研究得到了蓬勃发展。这里面的大致原因也有两个：

一是因为紧凯勒流形的拓扑结构必须满足很强的限制性条件，导致绝大多数的紧复流形都是非凯勒型的(后面我们将对这一论断作进一步说明)，因而研究(非凯勒的)一般厄米度量的微分几何学性质就有了必要性；

另一方面，超弦理论中的被称为 Hull-Strominger 系统的模型认为构成我们物质世界的所谓隐藏空间是一个非常特殊的三维紧厄米流形，即所谓的非凯勒 Calabi-丘空间，因而几何学服务于物理学的天然属性也在很大程度上促进了非凯勒几何学的发展。

厄米几何学研究的一个基本特点是人们通常会考虑一些特殊的厄米流形类。因为任何复流形上都有厄米度量，因而通过对一般厄米度量的微分几何学研究所得到的复解析结论适用于所有复流形，而关于 n 维复流形($n \geq 3$)的分类目前还属于完全超出认知的事。

自 1980 年代以来，若干特殊的厄米流形类得到了广泛的研究。其中最具有代表性的是**平衡**流形和**多重闭**流形。厄米度量 g 被称为是平衡的，若 $d(\omega^{n-1}) = 0$，即凯勒形式是余闭的。这里 n 是流形的复维数。具有平衡度量的复流形被称为**平衡型**的。平衡度量的定义是由 Michelshon 在 1982 年提出的，作为对凯勒条件的一种推广。当复维数大于等于 3 时，平衡度量可以是非凯勒的。此后四十年来，平衡流形被广泛研究并形成了一类重要的支撑性的特殊厄米流形类。

引言 5/7

凯勒流形的另一种推广是多重闭流形。厄米度量 g 被称为是多重闭的，若 $\partial\bar{\partial}\omega = 0$。在有些数学和理论物理文献中，这种度量也被称为是 SKT 的(strong Kähler with torsion 的缩写)。

多重闭的概念最早见于 Bismut 于 1989 年的文章，在那里他证明了任何厄米流形上唯一存在一个挠率全反对称的厄米联络。这个联络今天我们称之为 Bismut 联络。(厄米联络的意思是与度量和近复结构都相容的联络，它们构成一个无穷维仿射空间)。

物理学家 Strominger 在 1986 年也发现了 Bismut 联络的具体公式，并将其用到了 Hull-Strominger 系统的构造中。因此在有的文献中，该联络也被称为 Strominger 联络。Bismut 联络的扰率(写成 $(3,0)-$型张量)全反对称，因而是一个 3 次微分形式。用凯勒形式 ω 来表达，则 Bismut 扰率为 $S = \sqrt{-1}(\bar{\partial}\omega - \partial\omega)$。因而多重闭条件等价于 $dS = 0$，即 Bismut 扰率 3-形式为闭。

除平衡度量与多重闭度量之外，还有几种特殊厄米度量也被广为研究。下面我们设 (M^n, g) 为给定的厄米流形，设 ω 为其凯勒形式。

Gauduchon 度量是指满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$ 的厄米度量。Gauduchon 在 1977 年的一个著名结果是，当 M^n 为紧时，任何厄米度量都共形于唯一(常数倍下)一个 Gauduchon 度量。

作为推广，对任何整数 $1 \leq k \leq n-1$，傅吉祥、王志张、吴大旻在 2013 年引入了 **k-Gauduchon** 度量的概念，即满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^k) \wedge \omega^{n-k-1} = 0$ 的度量。显然，当 $k = n-1$ 时这便回到原来的 Gauduchon 度量。

Jost 和丘成桐在研究调和映射的刚性问题时引入了 **astheno-Kähler** 度量的定义，即满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-2}) = 0$ 的厄米度量。

若流形上存在整体 $(2,0)$-形式 α，使得 $d(\alpha+\omega+\overline{\alpha})=0$，则 g 被称为**厄米辛度量**。显然，

$$\text{厄米辛} \Longrightarrow \text{多重闭} \Longrightarrow \text{1-Gauduchon}.$$

在研究复结构形变理论时，Popovici 于 2013 年引入了**特殊 Gauduchon 度量**的概念：即在流形上存在整体 $(n,n-2)$-形式 Ψ 使得 $\partial(\omega^{n-1})=\overline{\partial}\Psi$ 成立。显然，我们也有

$$\text{平衡} \Longrightarrow \text{特殊 Gauduchon} \Longrightarrow \text{Gauduchon}.$$

此外，近年来，关于**李复流形**和**似凯勒流形**等特殊厄米流形类的研究也吸引了众多复几何学家的关注。因此在本短课程中，我们除介绍基本的凯勒几何学理论之外，会重点介绍一些特殊的厄米流形类及其几何、拓扑与函数论性质，加深同学们对凯勒流形和非凯勒流形的了解，也便于有兴趣的同学可以尝试这方面的研究。

复流形的定义 1/3

定义： 设 M 为(具有可数基的 Hausdorff 的连通)拓扑空间，有开子集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$，满足 $\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha = M$，且对任何 $\alpha \in A$，有 V_α 与 $\mathbb{C}^n$ 中开子集 D_α 之间的同胚 $f_\alpha : V_\alpha \to D_\alpha$，使得每当 $V_{\alpha\beta} := V_\alpha \cap V_\beta$ 非空时，限制映射(坐标变换)

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(V_{\alpha\beta}) \to f_\alpha(V_{\alpha\beta})$$

为全纯映射。这里每个 (V_α, f_α) 被称为(全纯)坐标邻域，n 被称为 M 的复维数。见下图。

复流形的定义 1b/3

纤维丛，向量丛。

复流形的定义 2/3

由定义可见，复流形是指哪种具有可数基的(连通)拓扑空间：局部都能被坐标邻域所覆盖，即局部看起来都像是复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 中的开集，而相交坐标邻域间的坐标变换(这是 $\mathbb{C}^n$ 中的两个开子集间的映射)皆为全纯映射。

显然，复流形的乘积也是复流形；复流形的任何(连通)开子集也是复流形；特别地，$\mathbb{C}^n$ 及其连通开子集(称为**区域**)是复流形。各类区域，特别是(强)拟凸的区域，是多复变函数论的主要研究对象。

复流形的定义 3/3

因 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$，任何 n 维复流形同时也是 $2n$ 维的光滑流形(称为其光滑底流形)。底流形总是可定向的，因为它们都是**近复流形**：即具有近复结构的光滑流形。近复结构是指光滑流形切丛上的满足方程 $J^2 = -I$ 的光滑变换 J(这里 I 为恒同映射)。近复流形总是偶数维的，且总是可定向的。

复流形的例子：有界对称域 1/2

设 $D \subseteq \mathbb{C}^n$ 为有界连通开子集。设 $Aut(D)$ 为 D 到自身的双全纯同胚所构成的群。若 $Aut(D)$ 可迁地作用于 D，则称 D 为**有界齐性域**。D 称为**有界对称域**，若对任何 $p \in D$ 存在 $Aut(D)$ 中元 f，满足 $f \circ f = I$ 且 p 为 f 的孤立不动点。

- 对称域必为齐性域
- $n \leq 3$ 时，齐性域皆对称 (Cartan)
- 对任何 $n \geq 4$，存在非对称的齐性域 (Pyatetskii-Shapiro)
- 当 $n \geq 7$ 时，存在连续统参数的齐性域
- 齐性域已被用代数方法完全分类 (1960 - 1970 年代)
- 对称域的分类：四个经典序列(**典型域**)，以及两个例外(维数分别为 16 和 27)。

复流形的例子：有界对称域 2/2

四个典型域序列：

$$
\begin{aligned}
D_1(p,q) &= \{Z \in M_{p\times q}(\mathbb{C}) \mid I_p - ZZ^* > 0\}, \quad 1 \le p \le q;\\
D_2(p) &= \{Z \in M_{p\times p}(\mathbb{C}) \mid I - ZZ^* > 0,\ {}^tZ = Z\}, \quad p \ge 2;\\
D_3(p) &= \{Z \in M_{p\times p}(\mathbb{C}) \mid I - ZZ^* > 0,\ {}^tZ = -Z\}, \quad p \ge 4;\\
D_4(n) &= \{Z \in M_{1\times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n \mid 1 + |ZZ^*|^2 - 2ZZ^* > 0,\\
&\qquad 1 - |ZZ^*| > 0\}, \quad n \ge 5.
\end{aligned}
$$

这四个域的复维数 n 和秩 r 分别为：

$$(n,r) = (pq,p),\quad (\frac{1}{2}p(p+1),p),\quad (\frac{1}{2}p(p-1),p),\ \text{以及}\ (n,2).$$

在我们后面会见到的标准度量之下，$D_2(p)$ 和 $D_3(p)$ 皆为 $D_1(p,p)$ 中的全测地子流形，$D_1(1,n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球，而 $D_4(n)$ 可作为 $D_1(1,n+1)$ 中的二次超曲面。

如前所述，任何对称域 D 都是齐性域，即其自同构群 $Aut(D)$ 可迁地作用在 D 上。实际上，$Aut(D)$ 还包含很多离散子群。设 $\Gamma \subseteq Aut(D)$ 为任何离散子群，则必有 Γ 的一个有限指标子群 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ 使得 Γ_0 自由地作用在 D 上(即除单位元外，Γ_0 中任何元的作用都没有不动点)，此时商空间 $M = D/\Gamma_0$ 仍然是光滑的，因而为复流形。M 称为一个**局部(厄米)对称空间**。

当商 M (在标准度量下)具有有限体积时，Γ_0 称为一个**格**(lattice)，当 M 为紧时，Γ_0 称为一个**一致格**(uniform lattice)。

任何对称域的自同构群都含有大量的一致格和非一致格。局部对称空间具有丰富的几何、拓扑、函数论、分析、与算术性质。

作为商空间的另一个更加具体的例子，我们可以考虑**复环**：$T^n_\Lambda = \mathbb{C}^n/\Lambda$，其中 $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的子群。换句话说，复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 中任何秩为 $2n$ 的自由阿贝尔子群都是一个一致格，其对应的商空间即为一个 n 维复环(complex torus)。1 维复环又称为**椭圆曲线**，它是代数几何和数论中的一个重要研究对象。

n 维复环的底流形只有一个，即 $2n$ 个 S^1 的乘积，但作为复流形它们可以不一样。以 $n=1$ 为例，通过选取 $\mathbb{C}$ 上合适的复欧氏坐标，我们可以假设 $\Lambda = \mathbb{R}\{1,\tau\}$，其中 τ 为虚部为正（即属于上半平面）的复数。记该椭圆曲线为 T^1_τ。不难看出，作为复流形，T^1_τ 与 $T^1_{\tau'}$ 同构(即双全纯同胚)当且仅当存在行列式为 1 的 2 阶整系数矩阵 A 使得 $(1,\tau') = (1,\tau)A$ 成立。

换言之，所有椭圆曲线构成的**模空间**是上半平面在 $SL(2,\mathbb{Z})$ 下的商。高维时的情形相类似，上半平面换成 Siegel 上半空间。区别：椭圆曲线都是代数曲线，但当 $n \geq 2$ 时，大部分 T^n_Λ 都不是代数流形(阿贝尔簇)。

近复流形 1/7

前面我们提到了任何复流形上都有一个自然的近复结构，即底流形切丛上的满足 $J^2=-I$ 的自同构 J。近复流形（即具有近复结构的光滑流形）的概念最早是由 Heinz Hopf 和 Charles Ehresmann 在 1940 年代末提出的，它代表(实)偶数维流形切丛的结构群可以由 $GL(2n,\mathbb{R})$ 约化成子群 $GL(n,\mathbb{C})$。

实向量空间 $V\cong\mathbb{R}^{2n}$ 上满足 $J^2=-I$ 的自同构 $J:V\to V$ 称为 V 上的一个近复结构。取 V 的基 $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}\}$ 使得 J 的矩阵表达为

$$J_0=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}.$$

容易验证，群 $GL(2n,\mathbb{R})$ 中与 J_0 可交换的元皆形如

$$X=\begin{bmatrix}A & B\\ -B & A\end{bmatrix}.$$

显然，$A+iB\mapsto X$ 使 $GL(n,\mathbb{C})$ 成为 $GL(2n,\mathbb{R})$ 的子群。

近复流形总是可定向的(习题)。给定一个可定向的偶数维的光滑紧流形，其上是否存在近复结构的问题是一个拓扑问题，在实 4 维的情形有完整的刻画(通过示性类)和相对深入的了解，但在 6 维及以上只有部分刻画(必要条件)，了解有限。近复流形构成一个很大的集合，它包含所有的复流形和所有的辛流形(即具有一个处处非退化的 2 次闭微分形式的光滑流形)。

习题：设 ω 为辛形式，g 为黎曼度量，则存在近复结构 J 使得 $\omega(X, JY) = g(X, Y)$ 对任何向量场 X, Y 成立。

Theorem (吴文俊)

4 维流形 M 上有近复结构当且仅当 $\exists\, h \in H^2(M, \mathbb{Z})$ 使得

$$h^2 = 2\sigma + 2\chi, \qquad h \equiv w_2 \mod 2.$$

此时 $h = c_1(M, J)$。这里 χ 为欧拉数，$\sigma = b^+ - b^-$ 为指标(此处 $b^+ + b^- = b_2$)，而 w_2 为第二 *Stiefel-Whitney* 示性类。

近复流形 3/7

由吴文俊定理和紧复曲面的分类理论，可以得到许多‘具有近复结构但不具有复结构’的 4 维流形的例子。第一个这种例子是由 Van de Ven 发现的，下面我们讨论一个简单例子：

例： 考虑 $M=(S^2\times S^2)\#(S^1\times S^3)\#(S^1\times S^3)$. 习题：证明这个流形满足：$\chi=0$，$\sigma=0$，$w_2=0$，$b_1=2$，并且其基本群为 $\pi_1(M)=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$。

由吴文俊定理，取 $h=0$，我们知道 M 上有近复结构。假设 M 上有复结构，则因第一 betti 数 b_1 为偶数，因此其上存在凯勒度量。习题：记 n 个 S^1 的 wedge 为 V_n。构造一个 2 层覆盖 $f:V_3\mapsto V_2$。

覆盖 f 表示，自由群 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ 包含一个指标为 2 的子群 H，它同构于自由群 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$。因此 M 具有一个 2 层覆盖 $\widetilde{M}\mapsto M$，其基本群为 $\pi_1(\widetilde{M})=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$，因而 $b_1(\widetilde{M})=3$，矛盾(凯勒流形的覆盖空间仍然凯勒，紧凯勒流形的 b_1 必为偶数)。因而 M 上没有复结构。

近复流形 4/7

有兴趣的同学可以再做一道习题：记 $k\mathbb{CP}^2$ 为 k 个复射影平面的连通和。试证：其上具有近复结构当且仅当 k 为奇数。提示：k 为奇数时，考虑 $h=(3,1,3,1,\ldots,3)$。对复曲面分类理论熟悉的同学还可以证明：当 $k>1$ 时，该流形上没有复结构。

对任意(偶数)维可定向流形 M^{2n}，用同伦论的语言描述，M^{2n} 上具有近复结构当且仅当 classifying map $t_M : M \mapsto SO(2n)$ 可以提升成 $\tilde{t}_M : M \mapsto BU(n)$。记 $Y_n = SO(2n)/U(n)$。提升的障碍为上同调类 $H^{i+1}(M, \pi_i(Y_n))$，$0 \le i \le 2n-1$。

当 $n=3$ 时，$Y_3 = \mathbb{CP}^3$，其 5 维及以下的同伦群只有 $\pi_2 \cong \mathbb{Z}$ 为非零，并且此时提升的障碍类为 $w_2(M)$ 在 Bockstein 同态 $H^2(M,\mathbb{Z}_2) \mapsto H^3(M,\mathbb{Z})$ 下的像。因此有：

Theorem

若紧定向 6 维流形 M 的 $H^3(M,\mathbb{Z})$ 没有 2-*torsion*，则 M 上有近复结构，且近复结构与 $w_2(M)$ 在 $H^2(M,\mathbb{Z})$ 中的提升一一对应。

在上面的命题里，如果我们记 $h \in H^2(M,\mathbb{Z})$ 为(对应于近复结构 J 的) w_2 的提升，则 J 的陈类为：$c_1 = h$, $c_2 = \frac{1}{2}(h^2 - p_1)$，其中 p_1 为 M 的第一庞特里亚金类。

实 6 维的紧、单连通且同调群无扰元(torsion free)的流形具有相对简单的拓扑结构，在 1960，1970 年代被 Wall，Jupp，Zubr 等人仔细研究过。它们拓扑(微分)同胚于 $M_0\#k(S^3 \times S^3)$，这里 $2k = b_3(M)$ 而 $b_3(M_0) = 0$。因此人们对 6 维流形是否具有近复结构的问题也有一些研究，尽管不如 4 维时那么清楚。

对 8 维及以上的维数，人们对给定的紧定向流形是否具有近复结构的问题相对了解更少。在球面的情形，由 Adams 定理(1958)，人们知道在所有维数的球面中，只有 S^2 和 S^6 具有近复结构。Adrian Kirchhoff 在 1947 年将 S^6 看作模长为 1 的纯虚 Cayley 数，显式地构造出一个 S^6 上的近复结构 J_0，被称为标准近复结构。

近复流形 6/7

若近复结构 J 来自于一个复结构(即由 $\sqrt{-1}$ 所给出)，则称 J 为**可积的**。J 可积的必要条件是其 Nijinhuis 张量消失：$N_J = 0$，这里

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY].$$

我们可以这样理解这个可积性的必要条件。设 $V \cong \mathbb{R}^{2n}$，其上有近复结构，即 $J : V \mapsto V$ 线性并满足 $J^2 = -I$。则复化向量空间 $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{2n}$ 可分解成 $V^{1,0}$ 与其共轭的直和，这里

$$V^{1,0} = \{X - \sqrt{-1}JX \mid X \in V\} \cong \mathbb{C}^n$$

为 J 的关于特征值 $\sqrt{-1}$ 的特征空间。如果 (M,J) 为近复流形，则前述逐点的定义可以延伸到切丛上，从而得到 $(1,0)$-型(复)向量场的概念。

近复流形 7/7

若 M 为复流形，则全纯向量场都是 $(1,0)-$型的。两个全纯向量场的李括号仍然是全纯的，因而有 $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subseteq T^{1,0}$。容易看出这个条件等价于$N_J = 0$ (验证)，因而 Nijinhuis 张量的消失是近复结构 J 可积的必要条件。

反过来，Newlander 和 Nirenberg 在 1957 年的一个著名定理是说，这个必要条件也是充分的。因此，对一个给定的近复结构而言，其是否可积的问题是一个可以直接验证的问题。

需要指出的是，这个定理是一个深刻的解析结果，即便对实 2 维(即曲面)的情形，也不是一件简单的事。在任何定向曲面 M 上总存在近复结构：任取其上的黎曼度量 $\langle , \rangle$，对切向量 X 定义 JX 为与 X 等长、垂直、且 $X \wedge JX$ 正向的向量。此时 $N_J = 0$ 自然成立。J 可积当且仅当局部总存在等温坐标 (x, y) :

$$|\frac{\partial}{\partial x}| = |\frac{\partial}{\partial y}|, \quad \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0.$$

复流形的例子：代数流形 1/4

例： $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$，这里 $z \sim z' \iff z = \lambda z'$，$\lambda \in \mathbb{C}^*$。即 $\mathbb{CP}^n$ 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中所有 1 维复线性子空间的集合。

对点 $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$，记其等价类为 $[z] = = [z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$。令 $U_i \subseteq \mathbb{CP}^n$ 为子集 $\{[z] \mid z_i \neq 0\}$。令

$$f_i : U_i \to \mathbb{C}^n, \quad f_i([z]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

易见，$U_0, \ldots, U_n$ 的并为整个 $\mathbb{CP}^n$，每个 f_i 为双射，并且对任何 $i \neq j$，$f_j \circ f_i^{-1}$ 为全纯。因而根据定义，$\mathbb{CP}^n$ 为复流形，称为**复射影空间**。

复射影直线 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$，复射影平面 $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}^1$，一般地，$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1} = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$，这里 e^k 表示 k 维胞腔。

作为推论，$H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t]/\langle t^{n+1} \rangle$，$H^2 = \mathbb{Z}t$，特别地，$b_0 = b_2 = b_4 = \cdots = b_{2n} = 1$，其余 $b_i = 0$。

复流形的例子：代数流形 2/4

定义： 紧复流形 M 称为**(复)射影流形**，若存在(某足够大的) m 和全纯嵌入 $M \hookrightarrow \mathbb{CP}^m$。

定理(周维良)： 任何复射影流形必是有限个齐次多项式的公共零点集。因此人们常常把复射影流形简称为代数流形。Chow, Wei-Liang. Amer J Math 1949, 71 (4): 893 – 914.

例子： 令 $M^n = \{[z] \in \mathbb{CP}^{n+1} \mid z_0^d + z_1^d + \cdots + z_{n+1}^d = 0\}$。可以验证，$M^n$ 为 $\mathbb{P}^{n+1}$ 的闭的复子流形，称为 d 次费马超曲面。

设 F 为 $z_0, \ldots, z_{n+1}$ 的齐 d 次多项式。设 $M^n = \{F = 0\}$ 为光滑(稍微扰动一下 F 即可达成：generic F)，则 M^n 也是 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中的一个 d 次超曲面。更一般地，对 generic 的齐次多项式 $F_1, \ldots, F_r$，$M^n = \{F_1 = \cdots = F_r = 0\} \subseteq \mathbb{CP}^{n+r}$ 为复射影流形，称为一个**完全交**流形(complete intersection)。

注：超曲面 $M^n \subseteq \mathbb{CP}^{n+1}$ 总是一个齐次多项式的零点集，但当余维 $r > 1$ 时，射影流形 $M^n \subseteq \mathbb{CP}^{n+r}$ 总是 m 个齐次多项式的公共零点集，但一般并不能保证 $m = r$ (显然 $m \geq r$)，因为根据 Lefchetz 超平面截面定理，当 $n \geq 2$ 时，完全交总是单连通的。

从解析的观点来看，复射影流形具有两条非常好的性质，一是具有良好的代数属性：其上拥有足够多的亚纯函数；二是具有良好的微分几何性质：其上具有凯勒度量。

任给紧复流形 M^n，其上所有的亚纯函数(局部上总可以写成两个全纯函数之商)的集合 $\mathbb{C}(M)$ 称为 M 的**函数域**。
若 $\mathbb{C}(M) \neq \mathbb{C}$，则总存在正整数 d 使得 $\mathbb{C}(M)$ 为 $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_d)$ 的有限扩张。这里 $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_d)$ 为多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 的商域。

函数域关于 $\mathbb{C}$ 的超越次数 d 称为 M 的**代数维数**，记为 $a(M)$.
当函数域为 $\mathbb{C}$ 时，令 $a(M) = 0$。所以我们总有 $0 \leq a(M) \leq n$。
满足 $a(M) = n$ 的紧复流形称为**Moishezon 流形**。

习题：复射影流形总是 Moishezon 的。

另一方面，$\mathbb{CP}^n$ 上标准的 Fubini-Study 度量(我们后面会给出细节)是凯勒度量，而凯勒度量在复子流形上的限制度量仍然是凯勒的，因此复射影流形总是凯勒的。

定理： 紧复流形为复射影流形 $\Longleftrightarrow$ 既凯勒又 Moishezon。

复流形的例子：代数流形 4/4

adjunction formula，平面曲线，空间中的曲面，…

前面我们提到了，紧复曲线 Σ_g 拓扑上构成一个以非负整数 g 排序的序列，g 称为复曲线的**亏格**。同亏格的紧复曲线都是微分同胚的，$\Sigma_0 = \mathbb{CP}^1$，Σ_1 为椭圆曲线，均同胚于环面 $S^1 \times S^1$，复结构构成复 1 维的模空间(为上半平面关于 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的商)。当亏格 $g \geq 2$ 时，复结构构成复 $3g-3$ 维的模空间 $\mathcal{M}_g$.

如何证明紧复流形 M^n 是射影流形呢？直观的办法是在 M^n 上找到足够多的全纯对象。因流形为紧，所以任何(整体)全纯函数都是常数，因而只能找 (M^n 上某个全纯线丛 L 的)全纯截面。记 $V = H^0(M,L)$ 为 L 的所有全纯截面所构成的(有限维)复向量空间。如果这个向量空间足够大，具体来说就是能够‘区分点’($\forall x, y \in M, \exists s \in V$ 使得 $s(x) \neq s(y)$) 并能‘给出局部坐标’($\forall x \in M, \exists s_0, \ldots, s_n \in V$，使 $(\frac{s_1}{s_0}, \ldots, \frac{s_n}{s_0})$ 为 x 点邻域内的全纯坐标)，则 V 的基 $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_m\}$ 给出全纯嵌入

$$\phi_L : M \hookrightarrow \mathbb{CP}^m, \quad \phi_L(x) = [\sigma_0(x) : \cdots : \sigma_m(x)].$$

复流形的例子：复曲线与复曲面 2/13

满足前页条件(即有嵌入 $M \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(M,L)) \cong \mathbb{CP}^m$) 的全纯线丛 L 称为是**非常丰沛**的 (very ample)；若有正整数 k 使得张量积 $L^{\otimes k}$ 为非常丰沛，则称 L 为**丰沛**的 (ample)。故紧复流形为射影流形的意思是其上存在丰沛线丛。

因此构造全纯截面是核心性的问题。一个常用的办法是运用 Hormander 的 L^2 方法解 $\overline{\partial}$ 方程，另一个办法是利用黎曼-拉赫公式(Riemann-Roch)和消灭定理等工具来计算上同调群 H^0 的维数，例如小平邦彦的嵌入定理就是通过消灭定理来实现的：

Theorem (Kodaira)

紧凯勒流形为射影当且仅当其上存在曲率处处为正的全纯线丛。

Riemann-Roch 公式的最简单情形：任给紧复曲线 $M=\Sigma_g$ 上的全纯线丛 L，$K=T^*_M$ 为典则线丛，$\deg(L)=c_1(L)[M]$，有：

$$H^0(M,L)-H^0(M,K\otimes L^*)=1-g+\deg(L).$$

复流形的例子：复曲线与复曲面 3/13

紧复曲面 M^2 具有完整的分类理论，即 Enriques-Kodaira 定理。与紧复曲线的情形相比，紧复曲面的类型更加丰富，给我们提供了更为充足的样本空间。

首先是基本拓扑量和解析量。记 $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(M, \mathbb{R})$ 为 betti 数；记 $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M)$ 为 Hodge 数。记 $q = h^{0,1}$, $p_g = h^{2,0}$. 这里 $H^{p,q}$ 为 Dolbeault 上同调群，q 称为 **irregularity**，p_g 称为 **arithmetic genus**。上同调群的乘法(cup 积)给出了 $H^2(M, \mathbb{Z})$ 上的相交形式及 $b_2 = b^+ + b^-$，$\sigma = b^+ - b^-$ 称为 **signature**。

由 Poicare 对偶可知 M^2 的欧拉数为 $c_2 = 2 - 2b_1 + b_2$，而 Hirzebruch 指标定理给出 $3\sigma = c_1^2 - 2c_2$；由 Hirzebruch-Riemann--Roch 我们有 $1 - q + p_g = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$。由这两式消去 c_1^2 可得：$(2q - b_1) + (b^+ - 2p_g) = 1$。习题：等式右端的两个括号都非负。因此，或 $b_1 = 2q$ 且 $b^+ = 2p_g + 1$，或 $b_1 = 2q - 1$ 且 $b^+ = = 2p_g$，前者为凯勒型曲面，后者为非凯勒型曲面。而且 c_1^2, q, p_g 皆为拓扑不变量。

Enriques-Kodaira 定理给出了紧复曲面的双有理分类。两个紧复流形间的全纯满射 $f: M^n \to N^n$ 称为 **modification**，若存在解析子簇 $F \subsetneq N$ 使得 f 的限制给出同胚 $M \setminus f^{-1}(F) \to N \setminus F$。

M^n 和 N^n 为双有理等价，记为 $M \sim N$，若存在紧复流形 X 及 modification $f: X \to M$ 和 $g: X \to N$。习题：证明 $\sim$ 具有传递性，从而为等价关系。

例： 设设 B 为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球，z, w 为 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯坐标。考虑复流形

$$\widetilde{B} = \{(z, [w]) \mid z_i w_j = z_j w_i, \ \ \forall 1 \le i, j \le n\} \subseteq B \times \mathbb{CP}^{n-1}$$

及投影映射的限制 $\pi: \widetilde{B} \to B$。记 $E = \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{CP}^{n-1}$。显然，$\pi$ 的限制给出 $\widetilde{B} \setminus E$ 与 $B \setminus \{0\}$ 间的全纯同胚。

亚纯映射 π^{-1} 称为关于原点的 blowing-up，π 称为(关于 E 的) blowing-down。

特别地，当 $n=2$ 时，exceptional divisor E 为一条光滑的有理曲线(即 $\mathbb{CP}^1$)，其自相交数为 -1：$E^2=-1$。复曲面中的自相交数为 -1 的光滑有理曲线称为 **(-1)曲线**。若 $E \subseteq M^2$ 为一条 (-1) 曲线，则有 blowing-down $\pi : M^2 \to N^2$ 将 E 映成一个点，而 N^2 仍然为复流形。

Theorem

两紧复曲面间的任何双有理(亚纯)映射 $f: M^2 \dashrightarrow N^2$ 都是有限个 *blowing-up* 和 *blowing-down* 的复合。

习题：设 $\pi : \widetilde{M} \to M$ 为紧复曲面的 blowing-down。证明 $b_2(\widetilde{M}) = b_2(M)+1$。因此从任何紧复曲面出发，最多经有限次 blowing-down 之后，曲面上不能再有(-1)曲线：这种曲面称为**极小曲面**。任何紧复曲面都双有理等价于某极小曲面。

有兴趣的同学还可以证明：$K_{\widetilde{M}} \cong \pi^* K_M \otimes \mathcal{O}(E)$，这里 $K=\det(T_M^*)$ 为典则线丛，而 $\pi_1(\widetilde{M}) \cong \pi_1(M)$。

设 K 为紧复流形 M^n 的典则线丛。对任何正整数 m，考虑复向量空间 $H^0(M, K^{\otimes m})$ 的维数 P_m。当 P_m 不全为零时，总存在正整数 m_0，非负整数 $\kappa \leq n$ 及正常数 C_1, C_2，使得

$$C_1 m^\kappa \leq P_m \leq C_2 m^\kappa, \qquad \forall\ m \in m_0\mathbb{N}.$$

换言之，$P_m \sim m^\kappa$。我们称 κ 为 M^n 的 Kodaira 维数，记为 $\mathrm{kod}(M)$。当 $P_m \equiv 0$ 时，约定 $\mathrm{kod}(M) = -\infty$。我们总有

$$\mathrm{kod}(M) \leq a(M) \leq n,$$

这里 $a(M)$ 为流形的代数维数，即其(亚纯)函数域的超越度数。满足 $\mathrm{kod}(M) = n$ 者称为 **general type 流形**，它们都是 Moishezon 的，即其代数维数 $a(M) = n$。

设 M^2 为紧复曲面。则 $\mathrm{kod}(M) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$。

习题：设 $\mathrm{kod}(M) \geq 0$。证明 M 上任何两条不同的(-1)曲线不相交。因而与 M^2 双有理等价的极小曲面唯一。

与此对应，当 $\mathrm{kod}(M) = -\infty$ 时，其双有理类中的极小曲面可以不唯一。例子：证明 $\mathbb{CP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 都是极小的，且双有理等价。实际上，某些有理曲面 M 上可以有无穷多条(-1)曲线(上面的习题对非有理曲面都成立)。

命题： 设 M^2 为极小曲面，$\mathrm{kod}(M) = -\infty$。则 M^2 或者为 $\mathbb{CP}^2$；或者为直纹面 $\mathbb{P}(E) \mapsto \Sigma_g$，其中 E 为紧复曲线 Σ_g 上的秩为 2 的全纯向量丛；或者为一个所谓的 VII_0 类曲面：满足 $b_1 = 1$ 和 $\mathrm{kod}(M) = -\infty$ 的极小曲面。

例： 任取 $a, b \in \mathbb{C}$ 满足$0 < |a| \le |b| < 1$，考虑 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上的全纯自同胚 $f(z_1, z_2) = (az_1, bz_2)$，生成群 $\Gamma = \{f^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$。商流形 $M = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\Gamma$ 为 VII_0 类曲面，称为 Hopf 面。

Hopf 面的定义为：万有覆叠为 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 的紧复曲面，它们都是 VII_0 类曲面，也总是可以被某个 primary Hopf 面所有限覆盖，后者的基本群同构于 $\mathbb{Z}$，由 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 的全纯自同胚 h 所生成：$h(z_1, z_2) = (az_1, bz_2 + \lambda z_1^m)$，其中 $0 < |a| \le |b| < 1$，m 为正整数，$\lambda(a - b^m) = 0$。（$\lambda = 0$ 者称为 Class 1，$\lambda \neq 0$ 者称为 Class 0，此时 $a = b^m$.）

例： 有理曲线 $\mathbb{CP}^1$ 上的任何全纯向量丛都同构于全纯线丛的直和(Grothendieck 定理)，因此其上的直纹面总可以写成 $F_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n))$，称为 Hirzebruch 面，$n = 0, 1, 2, \ldots$

习题：验证 $F_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$，$F_1$ 为 $\mathbb{CP}^2$ blowing-up 一个点。对所有 $n \neq 1$，F_n 为极小。对所有偶数 n，F_n 与 $S^2 \times S^2$ 微分同胚；对所有奇数 n，F_n 与 $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ 微分同胚。

命题： 紧复曲面 M^2 的代数维数 $a(M)=2$ 当且仅当它是射影的；$a(M)=0$ 当且仅当其上不可约曲线的条数有限(且此时的条数不超过 $h^{1,1}+2$)；若 $a(M)=1$，则 M^2 为椭圆曲面 (elliptic surface)，即存在全纯满射 $f: M\to B$ 使得 B 为光滑复曲线，f 的 generic 纤维为光滑椭圆曲线。

Kodaira 对椭圆曲面进行了详细研究，得到了所有奇异纤维类型的完整分类。椭圆曲面的 Kodaira 维数可以是 1，0，或 $-\infty$，但不能为 2。满足 $\mathrm{kod}(M)=1$ 的椭圆曲面称为 **properly elliptic surfaces**。b_1 为偶数的椭圆曲面类型很丰富，但 b_1 为奇数的椭圆曲面类型相对简单：

命题： 若椭圆曲面 $f: M^2\to B$ 的 b_1 为奇且 $\mathrm{kod}(M)\geq 0$，则所有奇异纤维只能为 mI_0 型，即为带重数 m 的光滑椭圆曲线；此时存在(可以带分支点的)有限覆盖 $\pi: B_1\to B$ 使得纤维积 $M_1=M\times_B B_1\to B_1$ 为以椭圆曲线为纤维的全纯纤维丛，且 $M_1\to M$ 为(无分支点的)有限覆盖。

定理 (Enriques-Kodaira)： 设极小紧复曲面 $\mathrm{kod}(M)=\kappa$.

- 若 $\kappa=2$，则 M 为 general type 曲面(定义)。
- 若 $\kappa=1$，则 M 为 properly elliptic surface。
- 若 $\kappa=0$，则 M 为 K3 面、Enriques 面、复环面、超椭圆面、primary 或 secondary Kodaira 面。
- 若 $\kappa=-\infty$，则 M 为 $\mathbb{CP}^2$、直纹面(除 F_1 外)、或 VII_0 面。

$K3$ 面的定义为：$q=0$，$K=\mathcal{O}$ 者，这类曲面全都微分同胚于 $\mathbb{CP}^3$ 中的 4 次曲面，特别地，它们都单连通。其模空间维数为 20，它们的代数维数可以是 $0,1,2$。习题：$b_2=22$。

Enriques 面的定义为：$q=0$，$K^2=\mathcal{O}$ 但 $K\neq\mathcal{O}$ 者，它们的 $a(M)=2$，都有个 2 层覆盖为(代数) K3 面。

超椭圆面和 primary，secondary Kodaira 面都是非平凡的全纯纤维丛 $f:M\to B$，其底流形 B 和纤维 F 都是椭圆曲线*；它们的 b_1 分别为 2、3、1，b_2 分别为 2、4、0。primary Kodaira 面满足 $K=\mathcal{O}$，而另外两类满足 $K^n=\mathcal{O}$ 但 $K\neq\mathcal{O}$，$n\in\{2,3,4,6\}$，其 n 层覆盖分别为(代数)复环面或 primary Kodaira 面。

primary Kodaira 面也可定义为满足 $b_1=3$，$K=\mathcal{O}$ 的紧复曲面。它们均为以椭圆曲线为纤维和底的全纯纤维丛，它们也均可写成 $M=\mathbb{C}^2/\Gamma$，其中 Γ 为仿射群的离散子群。经适当选取复欧氏坐标后，Γ 有表示 $\langle\alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \gamma,\delta\,\text{central},[\alpha,\beta]=\gamma^r\rangle$，$r\in\mathbb{N}$，

$$\begin{aligned}
\alpha(z)&=(z_1+az_2,z_2+1),\\
\beta(z)&=(z_1+pz_2,z_2+b),\\
\gamma(z)&=(z_1+c,z_2),\\
\delta(z)&=(z_1+1,z_2).
\end{aligned}$$

其中 $a,b,c\in\mathbb{C}$，$p=ab-rc$。习题：证明最后这个等式等价于关系 $[\alpha,\beta]=\gamma^r$。

复流形的例子：复曲线与复曲面 12/13

VII_0 类曲面除 Hopf 面之外，剩下的曲面可以分为两个集合：(A) 包含所有 $b_2 = 0$ 者，(B) 包含所有 $b_2 > 0$ 者。Inuoe 构造了三族 (A) 类曲面的例子，Bogomolov 的一个著名定理是说这三族例子就是 (A) 类的全部。1980 年代以来，人们已经发现了若干族 (B) 类曲面的例子，所有这些例子都具有所谓的 global spherical shell，即曲面包含一个余集连通的，双全纯同胚于 $\{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < |z| < 1 + \epsilon\}$ 的开子集。(B) 类曲面的完全分类目前还是一个公问题。

除此之外，所有 $\kappa \leq 1$ 的紧复曲面均可认为已了解清楚，当然绝大部分的紧复曲面为 $\kappa = 2$ 的情形，即 general type 曲面。

关于极小 general type 曲面 M^2，有以下已知结论：

- K 为 nef，即对 M^2 中任何不可约曲线 C 有 $KC \geq 0$，且 $= 0$ 当且仅当 C 为(-2)曲线，即自相交数为 -2 的有理曲线。
- K 为 big，即 $K^2 = c_1^2 > 0$。欧拉数 $c_2 > 0$。
- 两陈数满足 Miyaoka-Yau 不等式：$c_1^2 \leq 3c_2$。(习题：由此推出该不等式对所有紧复曲面都成立)。
- $5c_1^2 - c_2 + 36 \geq 0$。(这是所谓的 Noether 不等式的推论)

对紧复曲面有进一步兴趣的同学可以参考经典书籍 Barth, Hulek, Peters, Van de Ven. Compact complex surfaces, second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004

李复流形：李群作为复流形 1/5

李群是一类重要的几何研究对象：它同时是群和微分流形，且群运算(乘法和逆元)为光滑映射。最常见的李群为实或复系数的矩阵群，如一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 和 $GL(n,\mathbb{C})$，特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$ 和 $SL(n,\mathbb{C})$；正交群 $O(n)$，$O(p,q)$，$O(n,\mathbb{C})$，特殊正交群 $SO(n)$；酉群 $U(n)$，$U(p,q)$ 和特殊酉群 $SU(n)$，$SU(p,q)$；以及辛群 $Sp(n)$ 等等。

李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个具有李括号运算 $[\,,\,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ (反对称, 双线性且满足 Jacobi 恒等式)的向量空间。

设 e 为李群 G 的单位元。对任何 $x\in T_eG$，存在唯一 G 上左不变向量场 X 使得 $X_e=x$。向量场之间的李括号使得切空间 T_eG 自然成为一个李代数，称为 G 的李代数, 记为 $\mathrm{Lie}(G)=\mathfrak{g}$。有**指数映射** $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 使得 $\{\exp(tx)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 为 G 的单参数子群。反过来，任何李代数对应一个(连通、单连通)李群。李代数间的同态对应李群间的同态，特别地，李子代数对应于李子群。

定理(Ado)：任给李代数 $\mathfrak{g}$，必有 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}$ 为矩阵代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 的李子代数。

定义：李代数 $\mathfrak{g}$ 称为是**可解**的(solvable)，若 $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}^n = 0$。这里 $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，$\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^n]$ (交换子序列)。$\mathfrak{g}$ 称为是**幂零**的(nilpotent)，若 $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}_n = 0$。这里 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，$\mathfrak{g}_{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n]$ (下中心序列)。$\mathfrak{g}$ 称为是**(半)单**的((semi)simple)，若它不包含非平凡的(可解)理想。

定理(Engel)：设 V 为有限维向量空间，且李子代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}(V)$ 由幂零同态构成，则存在 $0 \neq v \in V$ 使得 $x(v) = 0$，$\forall x \in \mathfrak{g}$。特别地，存在 V 的基使 $\mathfrak{g}$ 中元皆严格上三角。

习题：若对李代数 $\mathfrak{g}$ 中所有元 x，自同态 $\mathrm{ad}x = [x, \cdot]$ 皆幂零，则 $\mathfrak{g}$ 幂零。反之亦然。

定理(Lie)：设 V 为有限维向量空间，且李子代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}(V)$ 可解，则存在 $0 \neq v \in V$ 使得 $x(v) = \lambda(x)v$，$\forall x \in \mathfrak{g}$，这里 $\lambda(x) \in \mathbb{C}$。因此存在 V 的基使 $\mathfrak{g}$ 中元皆上三角。

习题：若李代数 $\mathfrak{g}$ 可解，则 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 幂零。

定义：李代数 $\mathfrak{g}$ 的 **Killing** 形式 B 为 $\mathfrak{g}$ 上的对称双线性形式 $B(x, y) = \mathrm{tr}(adx \circ ady)$，$x, y \in \mathfrak{g}$。习题：证明对任何 $\mathfrak{g}$ 中元 x, y, z，有 $B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$。

定理(Cartan 可解性定理)：$\mathfrak{g}$ 可解 $\iff$ $B(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$，$\forall y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$。

习题：证明 $\mathrm{rad}B = \{x \in \mathfrak{g} \mid B(x, \cdot) = 0\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想。

定理(Cartan 半单性定理)：李代数 $\mathfrak{g}$ 半单 $\iff$ B 非退化，即 $\mathrm{rad}B = 0$。

习题：证明李代数为半单 $\iff$ 它是单李代数的直和。

单李代数已完全分类，由四个经典序列和五个例外组成。

命题：任何紧连通李群必形如 $(G \times T)/\Gamma$，其中 G 为紧单连通李群，$T = S^1 \times \cdots \times S^1$ 为环面，Γ 为有限群，含于 $Z \times T$ 且与 T 的交为 $\{0\}$，这里 Z 为 G 的中心，Z 总是有限的。

命题：紧单李代数为 $A_n\,(n \geq 1)$，$B_n\,(n \geq 2)$，$C_n\,(n \geq 3)$，$D_n\,(n \geq 4)$，以及五个例外 G_2，F_4，E_6，E_7，E_8。前四个序列分别为李群 $SU(n+1)$，$SO(2n+1)$，$Sp(n)$，$SO(2n)$ 的李代数。

李代数 $\mathfrak{g}$ 的 radical，记为 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$，是它的最大 solvable 理想。根据 Levi-Mal'tsev 分解定理，任给李代数 $\mathfrak{g}$，必存在半单子代数 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ 使得 $\mathfrak{g} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$（作为向量空间），且 $\mathfrak{g}$ 在内自同构下唯一。

下面我们讨论本节的重点，即李复流形的概念。

定义：带左不变复结构的李群称为**李复流形**。

注：1). 这个名词在使用中有少许模糊性：有些地方李复流形是指上述流形的紧商(有时甚至要求甲板群为酉格)。2). 因为李群总是可平行性空间(即其切丛平凡，或等价地，存在整体切标架)，因此其上(假设是偶数维的)总存在左不变的近复结构，但其上并不总存在左不变的复结构。3). 复李群是带双不变复结构的李群，但带左不变复结构的李群常常不是复李群。

习题：李代数 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}\{x_1,\dots,x_4\}$ 被定义为 $[x_1,x_2]=x_3$，$[x_1,x_3]=x_4$，其余 $[x_i,x_j]=0$。设 J 为 $\mathfrak{g}$ 上近复结构。证明 J 不可能满足可积性条件：

$$[Jx,Jy]-[x,y]+J[Jx,y]+J[x,Jy]=0,\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}.$$

文章 D. Angella et al, Commun. Anal. Geom. 30 (2022), no.5, 961-1006 中(表1, 2)列出了所有带左不变复结构的 6 维幂零和 Calabi-丘型可解李代数。

齐性复流形简介 1/4

比李复流形更为广泛地，齐性复流形也给出了一类重要的样本空间。任给复流形 M^n，记 $\mathrm{Aut}(M)$ 为其双全纯自同胚群。当 M^n 为紧时，这总是一个李群，但当 M^n 非紧时则不一定是李群，例如 $n \geq 2$ 时 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ 就是无穷维的(习题)。因此通常有:

定义： 复流形 M^n 称为**齐性复流形**，若有李群 $G \subseteq \mathrm{Aut}(M)$ 可迁地作用于 M^n。

齐性复流形有两个重要子类：一是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界齐性域，我们在前面介绍有界对称域时已经谈到，另一类是**齐性紧复流形**，它们都是全纯纤维丛(Tits bundle)，其底流形为**凯勒 C-空间**，纤维为**复平行空间**(complex parallelizable manifolds)，即复李群关于某离散子群的紧商。

凯勒 C-空间有很多叫法，如 rational homogeneous spaces, complex flag manifolds，等等。它们是不可约凯勒 C-空间的乘积，而后者为紧单李群 G 在其李代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Adjoint 作用的轨道。已完全分类。紧厄米对称空间是其特例。

若齐性复流形为齐性凯勒流形，则由 J. Dorfmeister 和 K. Nakajima 的一个著名结果，The fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifold. Acta Math 161: 1-2 (1988) pp. 23 – 70, 该流形为有界齐性域上的全纯纤维丛，纤维为凯勒 C-空间与 $\mathbb{C}^k/\Gamma$ 的乘积，Γ 为复欧氏空间的离散子群。

人们猜测一般的齐性复流形也有类似的全纯纤维丛结构 (Kobayashi quotient)，但所知不多。目前对复维数不超过 3 的齐性复流形已完全分类：J. Winkelmann, Classification des espaces complexes homogenès de dimension 3. I & II. C.R. Acad. Sci. Paris 306, 231-234 & 405-408 (1988)，共分为 35 个类别。

习题：证明复 1 维的齐性复流形为 $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$, 椭圆曲线 T^1_τ, 单位圆盘 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$，$\mathbb{CP}^1$.

猜想： 设 $2n$ 维单连通李群 G 带左不变复结构(李复流形)。若 G 幂零则与 $\mathbb{C}^n$ 双全纯同胚，若 G 可解则为 Stein，即为某 $\mathbb{C}^N$ 中的闭复子流形。($n = 2$ 时已知，可解复李群时已知)。

齐性复流形简介3/4

我们最感兴趣的是齐性复流形具有紧商的情形。李群具有一致格的一个必要条件是为幺模(unimodular)，即对其李代数中的任一元 x 有 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x) = 0$。任何半单李群或幂零李群都有一致格，但一个可解李群是否具有一致格常常是个困难的问题。

定义：带左不变复结构的李群称为**李复流形**。

例(Iwasawa)：考虑复李群

$$G_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

及其离散子群 $G_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$，商 $M^3 = G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$ 为齐性复流形。它是复平行性空间，但不再是李群。

例(Calabi-Eckman)：考虑李群 $G = SU(2) \times SU(2)$，因为 $SU(2) = S^3$，G 上的标准复结构为左不变的，所以是李复流形(标准球度量的乘积使它成为齐性厄米流形)，但不是复李群(习题：证明紧复李群只能是复环)。

回到齐性紧复流形 M，前面我们提到了 Tits bundle 使 M 称为全纯纤维丛 $\pi : M \to B$，其中 B 为凯勒 C-空间，而纤维 F 为复平行性流形(即复李群模掉离散子群的紧商)。若 M 上有不变的厄米度量，则 F 必为复环。

例如我们前页提到的 Calabi-Eckmann threefold，$SU(2) = S^3$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的单位球，有 Hopf 映射 $f_i : S^3 \to \mathbb{CP}^1 = S^2$ 将 (z_1, z_2) 映到 $[z_1 : z_2]$，这里 $i = 1, 2$ 分别对应两个因子。则 $\pi = f_1 \times f_2$ 将 G 映到 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$，纤维为椭圆曲线(1 维复环)。

齐性紧复流形，以及更一般的，紧局部齐性复流形(即齐性复流形的紧商)，构成一类重要的特殊厄米流形。关于这类流形的几何学性质尚有很多未知的问题亟待解答，对它们的了解往往可以对一般厄米流形的研究提供指导性的帮助。

彭罗斯的扭子空间 1/4

扭子空间提供了一类丰富的 3 维紧复流形的样本。

考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^4$，带标准的度量与定向。考虑其上与度量和定向都相容的(常值)近复结构 J，它(在标准基下)对应于一个行列式为 1 的反对称正交阵。所有这种 J 的集合 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^4)$ 光滑同胚于 S^2。

现在我们考虑一个紧定向的 4 维黎曼流形 (X, g)，对任何 $x \in X$，切空间 $T_xX \cong \mathbb{R}^4$，因而 $Z_x = \mathcal{J}(T_xX) \cong S^2$。并集 $\pi : Z = \cup_{x \in X} Z_x \to X$ 称为 X 的**扭子空间**。显然，Z 是 X 上的一个纤维为 S^2 的光滑纤维丛，因而是一个 6 维的紧光滑流形。

底流形 X 上的度量和球面上的标准度量可以自然地诱导出 Z 上一族共形的黎曼度量 h_t，$t > 0$，使得 π 为黎曼浸没。与此同时，在 Z 上有与 h_t 相容的近复结构 J：在 $(x, v) \in Z$ 点处，$J_{(x,v)} = J_v + J_0$，这里 J_0 是纤维 $S^2 = \mathbb{CP}^1$ 作为黎曼面的复结构，而 J_v 是 T_xX 上的那个对应于 $v \in \mathcal{J}(T_xX) \cong S^2$ 的近复结构。(J, h_t) 使 Z 成为一个近厄米流形。

4 维紧定向黎曼流形 (X,g) 的霍奇星算子 $*:\Lambda^2X\to\Lambda^2X$ 作用在微分 2-形式上。因为 $*^2=1$，所以特征值为 ±1，从而有 $\Lambda^2X=\Lambda^+X\oplus\Lambda^-X$，分解成**对偶**(selfdual)部分($*\psi=\psi$)和**反对偶**(anti-selfdual)部分($*\psi=-\psi$)。

黎曼流形 (X,g) 被称为是**反对偶的**(anti-selfdual)，若其黎曼曲率算子的共形不变部分在 Λ^+ 的分量为零：$W^+=0$。

利用同构 $\Lambda^2X\cong\mathfrak{so}(TX)$，$\psi\in\Lambda^2_pX$ 可视为 T_pX 上自同态，因而 Λ^+_pX 中的长度为 1 的元即为切空间 T_pX 上与度量相容的保定向的近复结构。因而我们前面构造的扭子空间 $Z=S(\Lambda^+X)$，这里 S 代表取单位模长的元。

1978 年，Atiyah，Hitchin，Singer 在文章：Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London Ser A, 1978, 362 (1711): 425 – 461 中证明，Z 上的前述近复结构 J 可积(即为复结构)当且仅当黎曼流形 (X,g) 是反对偶的。

彭罗斯的扭子空间 3/4

由 Taubes 的著名的粘贴定理，我们知道给定任何紧定向 4 维流形，当连通和上足够多个(反向)复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 之后，即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $X\#k\overline{\mathbb{CP}^2}$ 上存在反对偶黎曼度量，因而相应的扭子空间便是一个复 3 维的紧复流形。这个复流形与最初那个实 4 维流形 X 显然具有相同的基本群。

由 Milnor 的著名结果，我们知道任何有限表示群可以作为某 4 维紧流形的基本群，因而当复维数大于等于 3 时，紧复流形的基本群没有任何障碍。

除基本群的丰富性之外，扭子空间还具有若干已知特性。一是 Hitchin 的一个著名结果，它是说除开两个特例之外，扭子空间都是非凯勒型的，即其上不存在任何凯勒度量。这两个特例，X 为标准的 S^4 或 $\mathbb{CP}^2$，相应的扭子空间为 $\mathbb{CP}^3$ 或凯勒 C-空间 $M^3 = \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ (3 维旗流形)。

F. Campana 在 1991 年证明，扭子空间为 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形(即与某紧凯勒流形双亚纯等价)当且仅当其底流形 X 同胚于 S^4 或 k 个 $\mathbb{CP}^2$ 的连通和。他还证明了扭子空间都是有理连通的。

M. Verbitsky 在文章 Rational curves and special metrics on twistor spaces. Geometry & Topology 18 (2014), 897-909 中证明，非凯勒的扭子空间上不存在多重闭度量，即其凯勒形式 ω 满足 $\partial\bar{\partial}\omega = 0$ 的度量。

扭子空间的一个重要性质是，前述的厄米结构 (J, h_t) 是平衡的，即其凯勒形式 ω 满足条件 $d(\omega^{n-1}) = 0$，这里 $n = 3$。

给定复流形 M^n，其上的黎曼度量 $g = \langle\,,\rangle$ 若与近复结构 J 相容，即 $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$ 对任何向量场 X, Y 成立，则 g 称为复流形上的一个**厄米度量**。

设 $(z_1, \ldots, z_n)$ 为 M^n 上的局部全纯坐标，记 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$，又记 $g_{i\bar{j}} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \overline{\partial_j}\rangle$，则 $(g_{i\bar{j}})$ 为(正定厄米)矩阵值的光滑函数，称为度量 g 在自然标架 $\{\partial_i\}$ 下的矩阵，为方便计这个矩阵我们也记为 g。

更一般地，设 $\pi : E \to M$ 为复流形 M 上的秩为 r 的全纯向量丛，每个纤维 $E_p = \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{C}^r$ 都是复向量空间。若 $\forall\, p \in M$，有 E_p 上的厄米内积 h_p，且 h_p 光滑依赖于 $p \in M$，则称其为 E 上的一个厄米度量，记为 h。

若 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ 是 E 在 M 的某邻域内的一组全纯标架，则 h 在标架 e 下的矩阵表达为矩阵值函数 $(h_{\alpha\bar{\beta}}) = (h(e_\alpha, e_\beta))$。$(E, h)$ 称为**厄米丛**。M 上的厄米度量即为全纯切丛 T_M 上的厄米度量。

厄米度量2/8

记A^k，$A^k(E)$为流形M上所有k-形式或E-值k-形式所构成的向量空间。A^0即为流形的光滑函数代数。E上的联络为满足下列Leibniz方程的线性映射$D: A^0(E) \to A^1(E)$，

$$D(f\,s) = f\,Ds + df \otimes s, \quad \forall\, f \in A^0,\ \forall\, s \in A^0(E).$$

若对任何$s, t \in A^0(E)$，任何M上的向量场X，等式

$$X(h(s,t)) = h(D_X s, t) + h(s, D_{\overline{X}} t)$$

成立，则称D与度量h相容。若对任何局部全纯截面$s \in A^0(E)$和任何$(1,0)$-型向量场X有$D_{\overline{X}} s = 0$，则称D与E的复结构相容。任给厄米丛(E,h)，其上存在唯一一个联络与度量和E的复结构都相容。这个联络被称为**陈联络**，并记为∇。

在E的局部全纯标架e下，陈联络有表达式:

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^r \theta_i^j \otimes e_j = \sum_{j,k=1}^r \partial h_{i\bar{k}} h^{\bar{k}j} \otimes e_j,$$

或用矩阵记号，$\theta = \partial h\, h^{-1}$。注意到此时$\theta$的元素皆为$(1,0)$-形式，因此(陈联络的)曲率为$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta = \overline{\partial}\theta = \overline{\partial}(\partial h\, h^{-1})$。

厄米度量3/8

对流形的厄米度量 g，在自然标架 $\{\partial_i\}$ 下，陈联络的联络和曲率矩阵分别为：$\theta = \partial g\, g^{-1}$ 和 $\Theta = \overline{\partial}(\partial g\, g^{-1})$，其中 $g = (g_{i\bar{j}})$ 为度量的矩阵表达。定义 $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = \left(\Theta_k{}^q g_{q\bar{\ell}}\right)(\partial_i, \overline{\partial}_j)$，则有

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = -\partial_i\overline{\partial}_j g_{k\bar{\ell}} + \sum_{p,q} \partial_i g_{k\bar{q}}\, g^{\bar{q}p}\, \overline{\partial}_j g_{p\bar{\ell}}.$$

因为向量场之间有李括号，所以对流形上(即切丛上)的联络 D 可以定义**扰率张量**：$T^D(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]$。特别地对陈联络 ∇，陈扰率满足 $T(\partial_i, \overline{\partial_j}) = 0$ 以及

$$T(\partial_i, \partial_j) = \sum_k T_{ij}^k \partial_k, \quad T_{ij}^k = \sum_\ell \left(\partial_i(g_{j\bar{\ell}}) - \partial_j(g_{i\bar{\ell}})\right) g^{\bar{\ell}k}.$$

度量的凯勒形式为 $(1,1)$-形式 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$。显然，$d\omega = 0$ 当且仅当 $T = 0$，此时度量 g 被称为是**凯勒**的。

例： 设凯勒度量 g 在全纯坐标 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ 下的分量为：$g_{i\bar{j}}=\frac{1}{1+|z|^2}\delta_{ij}-\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\bar{z}_i z_j$，$1\le i,j\le n$。用矩阵表达，我们有

$$g=\frac{1}{\lambda}I-\frac{1}{\lambda^2}z^*z, \qquad \text{其中 } \lambda=1+|z|^2.$$

因 $g^{-1}=\lambda(I+z^*z)$，$\partial\lambda=dzz^*$，所以

$$\theta=\partial g\, g^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(\partial\lambda I+z^*dz\right).$$

利用前面的公式 $\Theta=\bar{\partial}\theta$，计算可得: $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}=g_{i\bar{j}}g_{k\bar{\ell}}+g_{k\bar{j}}g_{i\bar{\ell}}$.
对任何非零的 $(1,0)$-型切向量 X,Y 有

$$R_{X\overline{X}Y\overline{Y}}:=\sum R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}X_i\overline{X}_jY_k\overline{Y}_\ell=|X|^2|Y|^2+|\langle X,\overline{Y}\rangle|^2>0,$$

因而 $R_{X\overline{X}X\overline{X}}=|X|^4$。定义 $H(X)=R_{X\overline{X}X\overline{X}}/|X|^4$ 为**全纯截面曲率**，因此该(Fubini-Study)度量的 $H=2$，而其**双截曲率** $B(X,Y)=R_{X\overline{X}Y\overline{Y}}/|X|^2|Y|^2$ 取值范围为 $[1,2]$。习题：其(黎曼)截面曲率的取值范围为 $[\frac{1}{2},2]$，其凯勒形式为 $\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}(1+|z|^2)$.

厄米度量 5/8

为什么叫双截曲率？设 $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - iJu)$，其中 u 为实切向量，$|u| = |X| = 1$。同样，令 $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - iJv)$，$|v| = |Y| = 1$。因 $X \wedge \overline{X} = iu \wedge Ju$，$R_{**JxJy} = R_{**xy}$，我们有：

$$R_{X\overline{X}Y\overline{Y}} = -R_{uJu\,vJv} = R_{uJvJu\,v} + R_{uvJvJu} = -R_{uJv\,uJv} + R_{uvvu}.$$

其中第二个等式为第一 Bianchi 恒等式。由(黎曼)截面曲率的定义，$K(x \wedge y) = R_{xyyx}/|x \wedge y|^2$，我们得到

$$B(X, Y) = aK(u \wedge Jv) + bK(u \wedge v),$$

其中 $a = |u \wedge Jv|^2$ 和 $b = |u \wedge v|^2$ 都属于 $[0, 1]$，且不同时为零。因此双截曲率可以表达为两个截面曲面的(非负)线性组合。特别地，若截面曲率为正(负、非正、非负)，则双截曲率亦同样。而全纯截面曲率 $H(X) = B(X, X) = K(u \wedge Ju)$ 为 J-不变的 2 维切平面 $\mathrm{sp}\{u, Ju\} \cong \mathbb{R}^2$ 的截面曲率。

这里我们假设了度量为凯勒，故陈联络与黎曼联络重合而有 Bianchi 恒等式。非凯勒时，陈曲率张量一般没有这种对称性。

除前述曲率量之外，另一个重要的曲率量是**瑞奇曲率**。(第一)瑞奇曲率张量为 $\mathrm{Ric}_{i\bar{j}} = \sum_{k,\ell} R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}\, g^{\bar{\ell}k}$。设 $|u| = 1$ 为实切向量，$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - iJu)$，瑞奇曲率

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X) &= \sum_{i,j} \mathrm{Ric}_{i\bar{j}} X_i \overline{X_j} = \sum_{i=1}^{n} R_{X\overline{X}e_i\bar{e}_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(R_{u\varepsilon_i\varepsilon_i u} + R_{uJ\varepsilon_i J\varepsilon_i\, u} \right) = \mathrm{Ric}(u) \end{aligned}$$

即为黎曼曲率张量的瑞奇曲率。这里 $e_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_i - \sqrt{-1}J\varepsilon_i)$ 为酉标架。与黎曼情形一样，瑞奇曲率张量的迹为**数量曲率**：

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} R_{e_i\bar{e}_i e_j\bar{e}_j} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} R_{\varepsilon_i\bar{\varepsilon}_i\varepsilon_j\bar{\varepsilon}_j},$$

为黎曼数量曲率的一半。这里我们记 $\varepsilon_{n+i} = J\varepsilon_i$，$1 \le i \le n$。

厄米度量 7/8

具常截面曲率的完备黎曼流形称为**(实)空间形式**。单连通的空间形式有三种：S^n，$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{H}^n$。

对凯勒流形而言，截面曲率为常数会推出平坦(即曲率为零)，因此只能要求全纯截面曲率为常数。具常全纯截面曲率的完备凯勒流形称为**复空间形式**。单连通的复空间形式也只有三种：$\mathbb{CP}^n$，$\mathbb{C}^n$，$\mathbb{CH}^n$ (复双曲空间)。

复双曲空间的一个模型是我们前面见到过的有界对称域中的第一类典型域中的一个：即 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球(带 Bergman 度量)。

双截曲率为正的紧凯勒流形必双全纯同胚于 $\mathbb{CP}^n$。(Frankel/Hartshorne 猜想，Mori/Siu-Yau 定理)。双截曲率为正的非紧完备凯勒流形必双全纯同胚于 $\mathbb{C}^n$ (Yau 猜想)

瑞奇曲率为正的紧凯勒流形即为 Fano 流形，即 $c_1 > 0$ 的复射影流形。这是代数几何中最为关注的流形类之一。

全纯截面曲率为正的紧凯勒流形必为复射影流形且有理连通 (Yau 猜想，杨晓奎/Heier-Wong 定理)。

凯勒(厄米)度量有什么用？它可以让我们用微分几何的方法解答关于复解析结构的问题。下面我们举两个例子来加以说明。

例子一是关于双曲性(与全纯映射)的问题。**命题：** 设 (M^n, g) 为厄米流形，若其(陈联络的)全纯截面曲率 $H \leq -1$，则它是Kobayashi双曲的。当流形为紧时，该性质等价于：任何全纯映射 $f : \mathbb{C} \to M^n$ 必平凡。

证明思路：设 ω 为 g 的凯勒形式，$f^*\omega = u\sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z}$，则 u 为 $\mathbb{C}$ 上的非负光滑函数。若 f 非常值，则 u 不恒为零。通过计算其拉普拉斯 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$ 并利用全纯截面曲率有负上界的条件，可以得到矛盾(习题)。

例子之二是如下的**定理(伍鸿熙)：** 设 (M^n, g) 为单连通完备凯勒流形，具非正截面曲率，则 M 为Stein流形，即为某 $\mathbb{C}^N$ 中的闭的复子流形。

黎曼几何中的Cartan-Hadamard定理说具非正截面曲率的单连通完备黎曼流形与(实)欧氏空间微分同胚，而伍定理可看作是复的版本，用第二变分公式算距离平方函数的复拉普拉斯(习题)。

紧定向黎曼流形 M^n 上的 Hodge 星算子 $*: A^r \to A^{n-r}$ 由等式 $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dv$ 所定义。这里 dv 为体积元，A^r 为 M^n 上所有的 r-形式。由此得到 Hodge Laplacian $\Delta_d = (dd^* + d^*d)$，这里对 $\alpha \in A^r(M)$，$d^*\alpha = (-1)^{nr+1} * d * \alpha$ 为 d 的 Adjoint 算子。

星算子满足性质 $\langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ 以及 $** \alpha = (-1)^{r(n-r)}\alpha$，$\forall \alpha \in A^r$。记 $\mathcal{H}^r = \ker(\Delta_d) \subseteq A^r$ 为所有调和 r-形式的集合。Hodge 定理是说向量空间 $\mathcal{H}^r$ 为有限维的，且存在 Green 算子 $G: A^r \to A^r$ 使得 $I = \mathcal{H} + \Delta_d G$ 成立，这里 $\mathcal{H}$ 代表从 A^r 到 $\mathcal{H}^r$ 的投影。因此 $\forall \alpha \in A^r$，$\alpha = \mathcal{H}\alpha + d(d^* G\alpha) + d^*(dG\alpha)$。特别地：

$$H^r(M, \mathbb{R}) \cong H^r_{DR}(M) \cong \mathcal{H}^r(M).$$

这里 $H^r_{RD}(M) = \ker(d: A^r \to A^{r+1})/dA^{r-1}$ 为 de Rham 上同调，同构于 $\mathbb{R}$ 系数的奇异上同调。

习题：设 $\alpha \in A^r$，$\beta \in A^{r+1}$，证明

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *(d^*\beta).$$

现设 M^n 为紧凯勒流形，A^r 为 M^n 上复值 r-形式，$A^{p,q}$ 为所有 (p,q)-形式的集合。将(实)星算子作复线性延拓：$\alpha\wedge *\beta = = \langle\alpha,\beta\rangle dv$，则显然有 $*(f\alpha)=f*\alpha$，且 $*: A^{p,q}\to A^{n-q,n-p}$。

(当然也可将 $*$ 作复共轭延拓：由 $\alpha\wedge *\beta=\langle\alpha,\overline{\beta}\rangle dv$ 所定义，则有 $*(f\alpha)=\overline{f}*\alpha$，且 $*: A^{p,q}\to A^{n-p,n-q}$。这里我们取前者)。

设 $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ 为酉余标架。对多重指标 $I=(i_1,\dots,i_p)$，这里 $1\le i_1<\cdots<i_p\le n$, 记 $\varphi_I=\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}$，$\varphi_{I\overline{J}}=\varphi_I\wedge\overline{\varphi_J}$。记 $\hat{I}$ 为对应于 $\{1,\dots,n\}\setminus I$ 的多重指标，又记 $\psi=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$，$\varphi_I\wedge\varphi_{\hat{I}}=\varepsilon_I\psi$。体积元

$$dv=\frac{\omega^n}{n!}=(\sqrt{-1})^n\varphi_1\overline{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\overline{\varphi}_n=(\sqrt{-1})^{n^2}\psi\wedge\overline{\psi}.$$

习题：若 $|I|=p, |J|=q$，则 $*(f\varphi_{I\overline{J}})=(\sqrt{-1})^{n^2+2pn}\varepsilon_I\varepsilon_J f\varphi_{\hat{J}\overline{\hat{I}}}$.

此时流形(实)维数为偶，故 $d^*=-*d*=\partial^*+\overline{\partial}^*$，其中 $\partial^*=-*\overline{\partial}*: A^{p,q}\to A^{p-1,q}$，而 $\overline{\partial}^*=-*\partial*: A^{p,q}\to A^{p,q-1}$。

与黎曼情形相类似，我们可以定义 $A^{p,q}$ 到自身的 Hodge Laplacian： $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$ 和 $\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$。与黎曼情形一样，$\overline{\partial}$-调和形式空间 $\mathcal{H}^{p,q}_{\overline{\partial}} = \ker(\Delta_{\overline{\partial}}) \subseteq A^{p,q}$ 为有限维的，且有 Green 算子 $G_{\overline{\partial}}$ 使得 $I = \mathcal{H}_{\overline{\partial}} + \Delta_{\overline{\partial}} G_{\overline{\partial}}$ 在 $A^{p,q}$ 上成立，因而有 Hodge-Dolbeault 同构： $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \cong \mathcal{H}^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$，左端为 Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) = \ker(\overline{\partial} : A^{p,q} \to A^{p,q+1})/\overline{\partial}A^{p,q-1}$。但是由

$$\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + (\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial) + (\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial})$$

可见，在一般厄米流形上，Δ_d 与 $\Delta_{\overline{\partial}}$ 可以不等。换句话说，尽管任何 r-形式可以分解为所有满足 $p+q=r$ 的 (p,q)-形式之和，

$$A^r = A^{r,0} \oplus A^{r-1,1} \oplus \cdots \oplus A^{0,r} = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q},$$

但 r-形式为 Δ_d-调和并不能保证其 (p,q)-部分也是 Δ_d-调和的，反过来，$\Delta_{\overline{\partial}}$-调和的 (p,q)-形式也不一定是 Δ_d-调和的，因此不一定有上同调群上的直和分解。

当度量为凯勒时，有**凯勒恒等式**：$[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*$ 及其共轭 $[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*$，其中 $\Lambda = - * L *$ 为 Lefschetz 算子 $L\alpha = \omega \wedge \alpha$ 的伴随算子。由此我们可得：

$$\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = -i\{\partial[\Lambda, \partial] + [\Lambda, \partial]\partial) = 0,$$

同样地，$\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$，因而 $\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}}$，调和性没有分别，任何 r-形式为调和当且仅当其所有 (p, q)-部分为调和。因此我们得到 **Hodge 分解定理**：紧凯勒流形 (M^n, g) 上有

$$H^r_{DR}(M) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M), \quad H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = \overline{H^{q,p}_{\bar{\partial}}(M)}$$

取维数我们得到 betti 数与 Hodge 数之间的关系：

$$b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}, \quad h^{p,q} = h^{q,p},$$

特别地，b_{2k-1} 为偶数，$b_{2k} \geq h^{k,k} > 0$，（因为 $[\omega^k] \in H^{k,k}_{\bar{\partial}}(M)$）

凯勒几何 5/10

除 Hodge 分解之外，紧凯勒流形的上同调群还进一步满足 Hard Lefschetz 定理和 Lefschetz 分解，这在教科书中都可以读到。作为推论，其 betti 数满足

$$b_0 \leq b_2 \leq b_4 \leq \cdots \leq b_{2k},\quad b_1 \leq b_3 \leq \cdots \leq b_{2k+1},\quad k = [\frac{n}{2}].$$

此外，紧凯勒流形还满足所谓的 $\partial\bar{\partial}$-**引理**：若 $\alpha \in A^{p+1,q+1}$ 满足 $d\alpha = 0$，则 $\alpha \in \mathrm{Im}(\partial) \iff \alpha \in \mathrm{Im}(\bar{\partial}) \iff \alpha \in \mathrm{Im}(\partial\bar{\partial})$。这是一道很好的应用 Hodge 分解的练习题，建议同学们都去试试。

满足 $\partial\bar{\partial}$-引理的紧复流形称为 $\partial\bar{\partial}$-**流形**，所有与紧凯勒流形双亚纯等价的紧复流形(称为 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形)都是 $\partial\bar{\partial}$-流形，但 $\partial\bar{\partial}$-引理是否具有双亚纯不变性(当维数大于等于 4 时)目前还是一个公开问题。(参见饶胜, 杨松, 杨向东, 孟令旭的工作)

利用 $\partial\bar{\partial}$-引理，Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan (Invent Math 29 (1975), 245-274) 证明了紧凯勒流形有理同伦类型由其上同调环结构所决定。(紧凯勒流形为 formal)

Demailly-Paun (Annals Math 159 (2004), 1247-1274) 给出了凯勒版本的 Nakai-Moishezon 判则：紧凯勒流形 M 的凯勒锥 $\mathcal{K}$ 一定是其正锥 $\mathcal{P}$ 的某个连通分支；而当 M 为射影流形时，$\mathcal{K}=\mathcal{P}$。

记 $V=H^{1,1}(M)\cap H^2(M,\mathbb{R})$ 为所有实 $(1,1)$ 上同调类的空间，凯勒锥 $\mathcal{K}\subseteq V$ 为流形上所有(凯勒度量的)凯勒形式的上同调类的集合，而正锥 $\mathcal{P}\subseteq V$ 为所有正上同调类 α 的集合：对流形中的任何 k 维不可约解析子簇 Y，有 $\int_Y\alpha^k>0$。

注： Nakai-Moishezon 判则是说，射影流形上的全纯线丛 L 为丰沛的，当且仅当对流形中的任何 k 维不可约解析子簇 Y，有 $\int_Y c_1(L)^k>0$。因 Demailly-Paun 定理中不要求 α 为整系数上同调类, 所以即便是对射影流形而言, 该定理也是 Nakai-Moishezon 判则的推广。

自诞生以来，Demailly-Paun 定理被广泛应用，它使许多从射影流形向紧凯勒流形的理论推广成为了可能。

Kodaira 消灭定理： 设 M 为紧凯勒流形，L 为 M 上全纯线丛，具有曲率处处为正的厄米度量。任给 M 上的全纯向量丛 E，必存在正整数 m_0, 使得 $H^q(M, L^{\otimes m} \otimes E) = 0, \forall\, q > 0, \forall\, m \geq m_0$.

Kodaira 嵌入定理： 设 M 为紧凯勒流形，L 为 M 上全纯线丛，具有曲率处处为正的厄米度量。则 L 是丰沛的，即存在正整数 m 使得 $L^{\otimes m}$ 给出全纯嵌入 $M \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$。

上面的最后一句话等价于：存在全纯嵌入 $f : M \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ 使 $f^*\mathcal{O}(1) = L^{\otimes m}$。这里 $\mathcal{O}(1)$ 为 $\mathbb{CP}^N$ 的超平面截面丛。

除双有理(双亚纯)映射给出双有理等价类之外，复结构的形变理论则考虑同一个光滑流形(底流形)上不同复结构所形成的连续参数族。在这方面有经典的 Kodaira-Spencer 理论, Kuranishi 族，以及周期映射(period map and period domain)和 Torelli 定理等等. 有兴趣的同学可参考 Complex Manifolds, Morrow and Kodaira, 2006, AMS Chelsea Publishing.

最后我们讨论一下有关**射影群**和**凯勒群**的话题。记 $\mathcal{P}_n$ 为所有 n 维复射影流形的基本群所构成的集合，$\mathcal{K}_n$ 为所有 n 维紧凯勒流形的基本群所构成的集合。取流形与 $\mathbb{CP}^1$ 的乘积，我们有

$$\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}, \qquad \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{K}$$

这里 $\mathcal{P} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$，$\mathcal{K} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{K}_n$，分别称为射影群和凯勒群。

Lefschetz 超平面定理：设 $X^{n+1} \subseteq \mathbb{CP}^N$ 为复射影流形, H 为超平面, $M^n = X \cap H$。考虑包含映射 $\iota : M \hookrightarrow X$ 诱导的同态：

$$H^k(\iota) : H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(M, \mathbb{Z}), \qquad \pi_k(\iota) : \pi_k(M) \to \pi_k(X).$$

则对任何 $k < n$，$H^k(\iota)$ 和 $\pi_k(\iota)$ 皆为同构；对 $k = n$，$H^k(\iota)$ 为单射，$\pi_k(\iota)$ 为满射。

特别地，当 $n \geq 2$ 时，有 $\pi_1(M) \cong \pi_1(X)$，因此任何 n 维射影流形与某射影曲面具有相同的基本群，所以

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 = \cdots = \mathcal{P}.$$

显然对任何 n 有 $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{K}_n$，因而

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_3 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{K}.$$

Kodaira 形变定理： 任何紧凯勒曲面 M^2 皆可连续形变至某射影曲面。

特别地，任何紧凯勒曲面与某射影曲面微分同胚，因而具有相同的基本群：$\mathcal{K}_2 = \mathcal{P}$。

Claudon, Höring, Lin 在文章 (The fundamental group of compact Kähler threefolds. Geom Topol 2019, 23: 3233-3271) 中证明了**定理：** $\mathcal{K}_3 = \mathcal{P}$。

他们甚至猜测 $\mathcal{K} = \mathcal{P}$，即凯勒群就是射影群。凯勒群是近年来复几何和几何群论中的研究热点之一。

习题(Serre 定理)：任何有限群都属于 $\mathcal{P}$。提示：利用 Lefschtz 超平面定理，构造一个基本群为对称群 S_n 的射影流形。

关于射影群和凯勒群有很多的研究，也仍有许多问题和猜想。下面我们随机地举一个例子来加以说明。

Arapura 和 Nori (Compositio Math 116 (1999), 173-188) 证明，任何可解的射影群必为 virtually 幂零的，即含有一个有限指标的幂零子群。Delzant (Math Ann 348 (2010), 119-125) 证明了凯勒群也具有这个性质。

对凯勒群有进一步兴趣的同学可以阅读 Marc Burger 在 Bourbaki 讨论班的综述报告 (Fundamental groups of Kähler manifolds and geometric group theory, Séminaire BOURBAKI, 62 (2009-2010), no.1022)

如我们在引言部分已经提到的，给定厄米流形 (M^n, g)，唯一存在的与 g 和 J 都相容，扰率无 $(1,1)$ 部分的联络，称为**陈联络**，记为 ∇。在自然标架 $\{\partial_i\}$ 下，联络矩阵为 $\theta = \partial g\, g^{-1}$。陈联络的扰率满足 $T(\partial_i, \overline{\partial}_j) = 0$，$T(\partial_i, \partial_j) = \sum_k T_{ij}^k \partial_k$，

$$T_{ij}^k = \sum_t \left(\partial_i g_{j\bar{t}} - \partial_j g_{i\bar{t}}\right) g^{\bar{t}k}.$$

厄米流形上也唯一存在一个与 g 和 J 都相容，扰率全反对称的联络，称为 **Bismut 联络**，记为 ∇^b。在自然标架 $\{\partial_i\}$ 下，其联络矩阵为：

$$(\theta^b)_i^{\ j} = \overline{\partial} g\, g^{-1} + \left(\partial_i g_{s\bar{t}}\, dz_s - \overline{\partial}_t g_{i\bar{s}}\, d\bar{z}_s\right) g^{\bar{t}j}.$$

陈联络 ∇，Bismut 联络 ∇^b，以及 Levi-Civita (即黎曼)联络 ∇^r，是厄米流形上研究得最多的三个度量联络。当 g 为凯勒时，这三个联络都相等，当 g 非凯勒时，这三个联络两两不等，此时我们有三种不同的几何。

厄米几何 2/7

由陈扰率的公式 $T_{ij}^k = \sum_t \left(\partial_i g_{j\bar{t}} - \partial_j g_{i\bar{t}}\right) g^{\bar{t}k}$ 可知，

$$T = 0 \iff \partial_i g_{k\bar{j}} = \partial_k g_{i\bar{j}} \ \ \forall\, i,j,k \iff d\omega = 0,$$

这里 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ 为凯勒形式。因此度量为凯勒当且仅当陈扰率为零。厄米度量的所有非凯勒信息都包含在 T 及其导数身上。

例如，我们前面见到的凯勒恒等式，在一般厄米流形上也有这个公式，不过要加上由陈扰率组成的修正项，当度量凯勒时就回到通常的凯勒恒等式。利用这个一般型的凯勒恒等式及类似的结论，人们可以得到 Hodge 理论的部分推广，例如 Angella 关于 Bott-Chern 上同调和 Appeli 上同调的工作。

分别用 R，R^b，R^r 表示陈联络、Bismut 联络和黎曼联络的曲率张量，则它们之间的关系可以用 T 和 ∇T 表达出来。(非凯勒)厄米几何研究中的一个显然的困难是这些曲率张量**全都缺乏**我们熟悉的(凯勒)对称性：即只剩 $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}$ 且 $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = R_{k\bar{j}i\bar{\ell}}$。

定理(Gray)：在任何厄米流形上，黎曼曲率张量 R^r 满足

$$R^r_{ijk\ell} = 0, \quad \forall\, i, j, k, \ell$$

换句话说，在 (1, 0)-型标架下，非零的黎曼曲率分量只有 $R^r_{ijk\bar{\ell}}$，$R^r_{i\bar{j}k\bar{\ell}}$，$R^r_{ik\bar{j}\bar{\ell}}$ 这几种(及其共轭)，且由 Bianchi 恒等式，

$$R^r_{ik\bar{j}\bar{\ell}} = -R^r_{\bar{j}ik\bar{\ell}} - R^r_{k\bar{j}i\bar{\ell}} = R^r_{i\bar{j}k\bar{\ell}} - R^r_{k\bar{j}i\bar{\ell}}.$$

定义：厄米流形称为**黎曼似凯勒**(Riemannian Kähler-like, RKL)，若在流形上任何点，对任何指标，有 $R^r_{ijk\bar{\ell}} = 0$，$R^r_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = R^r_{k\bar{j}i\bar{\ell}}$。

换言之，若黎曼曲率 R^r 满足所有凯勒对称性，则称度量为黎曼似凯勒的。对 2 维紧厄米流形，这个条件推出度量为凯勒，但当维数大于 2 时，存在非凯勒的这种度量的例子。

同样地，针对陈曲率 R 和 Bismut 曲率 R^b，我们也可以定义**陈类凯勒**(CKL)和 **Bismut 类凯勒**(BKL)的概念。对紧 2 维厄米流形，CKL $\Longrightarrow$ 凯勒，但在 3 维及以上有非凯勒的 CKL 流形(例如：陈平坦流形，目前尚无它例)。BKL 则 2 维就有非凯勒的例子。

厄米几何 4/7

比似凯勒流形更特殊的是平坦流形。对陈联络，Boothby 1958 年的一个经典定理是说，任何陈平坦的紧厄米流形的万有覆盖一定是一个复李群，带左不变度量。当维数大于等于 3 时，这种流形可以是非凯勒的(例如 Iwasawa 三维流形)。

与此对应，紧 Bismut 平坦流形的万有覆盖为 Samelson 空间，即紧半单李群乘以向量群(欧氏空间)，带双不变度量和相容的左不变复结构。这种空间在 1980 年代就已知是Bismut 平坦的，反过来则是王青松-杨波-郑的结果(Trans AMS, 2020)。

而对黎曼平坦的紧厄米流形，因为紧平坦黎曼流形的有限覆盖总是一个平坦环面(Bieberbach)，所以问题归结为：在平坦环面 $T^{2n}_{\mathbb{R}}$ 上有多少与度量相容的复结构 J? $n=2$ 时 J 只能取常值，即只能是复环面，但当 $n\geq 3$ 时可以有其它的复结构，使所得的厄米流形为非凯勒的。$n=3$ 时, Khan-杨波-郑(Adv Math, 2017) 证明所有这种复结构都是所谓的 BSV 环面(warped 复结构)。在 $n\geq 4$ 时黎曼平坦紧厄米流形的分类还是一个公开问题。

似凯勒流形里最丰富的一类是 BKL 流形。目前对 5 维及以下的这类流形已经有分类定理，但 6 维及以上还是公开问题。

2 维的 BKL 流形恰好是 Vaisman 曲面(下面会介绍)，紧致非凯勒的 Vaisman 曲面由 Belgun (Math Ann, 317 (2000), 1-40) 完全分类：它们是非凯勒的 properly 椭圆曲面，Kodaira 面，Hopf 面 (Class 1 或 elliptic)。除乘积外，3 维 BKL 流形的万有覆盖一定是两个 Sasakian 3 维流形的乘积(丘成桐-赵全庭-郑，Trans AMS 2023)，4 维和 5 维 BKL 流形也有完全分类(赵全庭-郑, preprint).

一般维数的 BKL 流形还具有若干好的性质，例如, 设 (M^n, g) 为紧、非凯勒 BKL 流形，则有

- (赵-郑) M 为多重闭的，其上不存在任何平衡度量；
- (丘-赵-郑) 若 $n \geq 3$，则 M 上不存在任何 Vaisman 度量；
- (赵-郑) g 为 Bismut Ricci 平坦 $\Longrightarrow$ Bismut 平坦。

Vaisman 流形是一种特殊的局部共形凯勒(lcK)流形：其 Lee 形式在黎曼联络下平行。

厄米几何 6/7

局部共形凯勒(lcK)流形是一种比较简单的非凯勒流形：它在局部邻域上总存在正值光滑函数，使度量的共形变换为凯勒度量。等价地，厄米流形 (M^n, g) 为 lcK $\Longleftrightarrow$ 存在 M 上的闭 1-形式 ψ 使得 $d\omega = \omega \wedge \psi$。显然这个 1-形式唯一，称为 Lee 形式。如果还有 $\nabla^r \psi = 0$，则度量被称为 Vaisman 的。

lcK 的概念由 Izu Vaisman 在 1970 年代引入，数十年来被广泛研究，最近 Ornea 和 Verbitsky 在 arXiv 上放了一篇近 800 页的书稿(arXiv: 2208.07188)，详细讲述了这类流形的性质和结构。

与一般 lcK 流形相比，Vaisman 流形具有良好的结构，例如，Ornea-Verbitsky 的一个定理是说，任何紧 Vaisman 流形一定有某个有限覆盖为 S^1 上的纤维丛，纤维为一个紧 Sasakian 流形 (“奇数维的凯勒流形”)。

最后我们再介绍一类重要的非凯勒流形，即**非凯勒卡-丘流形**。这个名词用得比较宽泛，这里我们采用 Tosatti 的定义(arXiv: 1401.4797)：紧复流形 M^n 称为一个非凯勒卡-丘流形，若其第一 Bott-陈类 $c_1^{BC}(M)=0$。等价地，这表示 M^n 上存在厄米度量 g 使其陈联络的第一 Ricci 曲率为零：

$$\mathrm{Ric}(\omega) := -i\partial\overline{\partial}\log\omega^n = 0.$$

这里 ω 为 g 的凯勒形式。用和乐群的语言，这个定义表示 g 的限制和乐群(restricted holonomy group)含于 $SU(n)$。

如果 M^n 的典则线丛 K 为平凡或 torsion，即存在正整数 m 使得 $K^{\otimes m}\cong\mathcal{O}_M$，则有 $c_1^{BC}(M)=0$。反过来一般不成立，但 Tosatti 证明在下列情况下成立：$n=2$、或 M^n 凯勒、或 $b_1(M)=0$、或存在整数 ℓ 使 $H^0(M,K^{\otimes\ell})\neq 0$ (包含 $\mathrm{kod}(M)\geq 0$ 的情形)、或 M^n 属于 Fujiki $\mathcal{C}$ 类。

他还证明，当加上条件 $b_1=2h^{0,1}$ ($\Longleftrightarrow$ 该流形对 $(1,1)$-形式满足 $\partial\overline{\partial}$-引理)时，非凯勒卡-丘流形的小形变仍为非凯勒卡-丘。

几个公开问题 1/6

在这一节中，我们介绍几个非凯勒几何中的公开问题，方便有兴趣的同学作进一步研究。

全纯截曲率猜想： 若紧厄米流形的(陈)全纯截面曲率 $H = c$ 为常数，则当 $c \neq 0$ 时度量必凯勒，而当 $c = 0$ 时度量为陈平坦.

猜想的假设条件为 $R_{X\overline{X}X\overline{X}} = c\,|X|^4$，等价于

$$\widehat{R}_{i\bar{j}k\bar{\ell}} := \frac{1}{4}\left(R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} + R_{k\bar{j}i\bar{\ell}} + R_{i\bar{\ell}k\bar{j}} + R_{k\bar{\ell}i\bar{j}}\right) = \frac{c}{2}\left(g_{i\bar{j}}g_{k\bar{\ell}} + g_{k\bar{j}}g_{i\bar{\ell}}\right).$$

由于陈曲率没有凯勒对称性，全纯截曲率不能有效控制整个曲率张量，因此产生这个自然的猜想。

注： 这里紧性条件是必要的。若将陈曲率改为黎曼曲率，也有同样的猜想。又若将陈曲率改为 Bismut 曲率，则 $c \neq 0$ 时有同样的猜想，但 $c = 0$ 时的陈述需要调整：存在 Bismut 全纯截曲率为零但不是 Bismut 平坦的紧厄米流形的例子。

现状：$n = 2$ 时已知(Balas-Gauduchon, Apostolov et al)，$n \geq 3$ 时未知, 仅有部分性结果(汤凯, 陈豪杰-陈玲玲-聂晓兰, ...)

另一个近年来比较热门的猜想是下面的

Fino-Vezzoni 猜想： 若紧复流形上存在平衡度量和多重闭度量，则必存在凯勒度量。

换言之，该猜想是说任何非凯勒型的紧复流形上不可能同时拥有平衡度量和多重闭度量。这里复流形的维数至少是3，因为在复2维时平衡等同于凯勒。该猜想中紧性假设是必要的：存在非紧的非凯勒型流形，其上同时存在平衡度量和多重闭度量。

另外，上述猜想的困难之处主要在于平衡度量和多重闭度量可以不同。根据 Alexandrov-Ivanov 的一个结果，任何既平衡同时又多重闭的厄米度量必然凯勒。

Fino-Vezzoni 猜想自问世以来，吸引了众多复几何学家的关注，在对该猜想的研究上也出现了大量的部分性结果，使该猜想在许多特殊的厄米流形类中得到了验证，因此大家也更为相信该猜想应该成立。下面我们简要列举一些例子。

例如，Verbitsky 在(Geom Topol, 2014)中证明了在任何非凯勒型的扭子空间上不能有多重闭度量，因而上述猜想对所有扭子空间都成立。

又如，Chiose (Proc AMS, 2014)证明该猜想对所有 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形成立。傅吉祥-李骏-丘成桐在(J Diff Geom,2012)中证明了该猜想对一类特殊的 3 维非凯勒卡-丘空间成立。费腾在(Adv Math, 2016)中证明了该猜想对广义 Calabi-Gray 流形成立。Otiman 在 (Bull London Math Soc, 2022)中证明该猜想对所有 Oeljeklaus--Toma 流形成立。

针对李复流形，Fino 和 Vezzoni 在论文(J Geom Phys, 2015)中证明了他们的猜想对所有(具有复结构的)实 6 维的具有平凡典则线丛的可解李代数成立。紧接着，在论文(Proc AMS,2016)中他们又证明了对步长为 2 的任意维幂零李代数，该猜想成立。他们同时也猜测，任何具有多重闭度量的幂零复流形必然步长不超过 2，这一论断最近被 Arroyo 和 Nicolini (arXiv: 2201.12167)所证明，因此 **Fino-Vezzoni 猜想对所有幂零复流形都成立**。

几个公开问题 4/6

在除幂零流形之外的李复流形中，Fino-Grantcharov-Vezzoni (IMRN, 2019)和 Podestà (Transform Groups,2018)证明了当 G 为紧半单李群时，Fino-Vezzoni 猜想成立。Guisti-Podestà 在(arXiv: 2106.14557)中证明该猜想对非紧实半单李群上所有的正则复结构都成立。在 Fino-Paradiso 的两篇近期文章(arXiv: 2011.09992, 2112.11960) 中，他们分别在“几乎阿贝尔”(almost abelian，即 G 的李代数含有余维为 1 的阿贝尔理想)的情形和“几乎幂零的可解群”(即可解李代数的 nilradical 具有 1 维的 commutator)的情形证明了该猜想。

最近，Freibert 和 Swann 在文章(arXiv: 2203.16638)中考虑了步长为 2 的可解群，他们证明了在一类特殊的情形，即所谓的 pure type 时，Fino-Vezzoni 猜想成立。

几个公开问题 5/6

最后我们再介绍一个弱版的广义 Hartshorne 猜想。首先让我们回顾一下著名的 Frankel/Hartshorne 猜想。

猜想(Frankel)：任何双截曲率为正的紧凯勒流形必双全纯同胚于 $\mathbb{CP}^n$。

猜想(Hartshorne)：(在特征零的代数闭域上)任何切丛丰沛的射影流形必同构于 $\mathbb{P}^n$。

因为正双截曲率 $\Longrightarrow$ 切丛丰沛，所以后一猜想能推出前者。Mori (Annals, 1979)证明了后者，几乎同时，萧荫堂-丘成桐 (Invent,1980)用微分几何方法证明了前者。

这两个猜想都有广义版本，即讨论非负的情形。此时平坦因子(平坦复环面)可以出现，但通过 Howard-Smyth-Wu 分裂定理或 Demailly-Peternell-Schneider 约化定理，可以将广义猜想归结到单连通的情形，即有：

猜想(generalized Frankel)：任何双截曲率非负的单连通紧凯勒流形必双全纯同胚于紧厄米对称空间。(莫毅明定理, 1986)

猜想(generalized Hartshorne)： 任何切丛为 nef 的 Fano 流形必同构于 rational homogeneous space (即凯勒 C-空间，或 flag manifolds)。

这个猜想在有的文献中也被称为 Campana-Peternell 猜想，在一般维数(6 及以上)目前这个猜想仍然未知。

设 M^n 为凯勒 C-空间，g_0 为其上的凯勒-爱因斯坦度量。当 M 为紧厄米对称空间时，g_0 具非负双截曲率。但当 M 非对称时，根据莫毅明定理，M 上任何凯勒度量都不能有处处非负的双截曲率。但 M 的齐性保证了其上存在厄米度量 g：它的双截曲率处处非负。这推出切丛 nef。因此上面这个猜想的一个(微分几何的)弱化版本为：

弱版广义 Hartshorne 猜想： 若 Fano 流形上有双截曲率非负的厄米度量，则必双全纯同胚于某凯勒 C-空间。

(Hermitian curvature flow, Ambrose-Singer connection and generalized holonomy theorem,...)

谢谢大家!